Lucrare avizată de Comisia Națională de Matematică din Ministerul Educației și Cercetării cu nr. 36684/1996 și cu nr. 25216/1999 pentru folosirea în clasă și pregătirea suplimentară a elevilor.

Editura *PARALELA 45*
Frații Goleşti 128 - 130, Piteşti, 0300
Tel./fax: 048 - 63.14.39, 63.14.92, 21.45.33

ISBN 973-593-585-6

Lei 45000

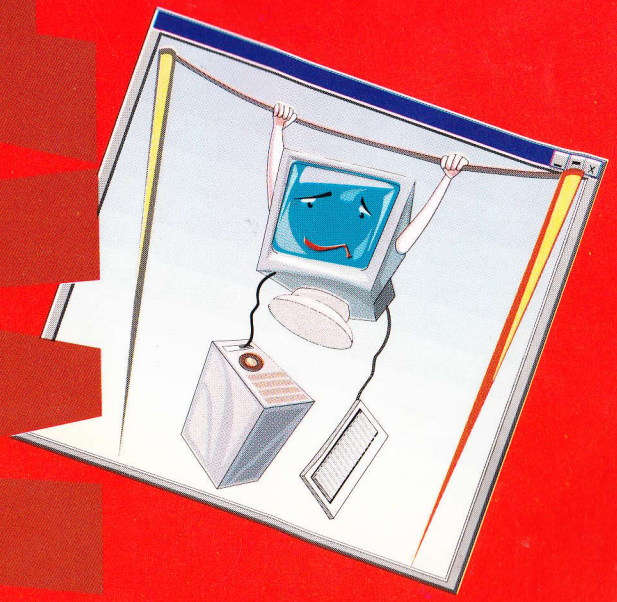
2000+2

partea I

Sorin Peligrad
Sorin Simion
Dan Zaharia
Maria Zaharia

ARITMETICĂ ALGEBRĂ GEOMETRIE

clasa a V-a



EDITURA PARALELA 45

Probleme recapitulative din ciclul primar

❒**1.** Scrieți în ordine crescătoare numerele de două cifre distincte ce se pot forma cu cifrele: 2, 5 și 0.

❒**2.** Scrieți în ordine descrescătoare toate numerele de două cifre ce se pot forma cu cifrele: 2, 5 și 7.

❒**3.** Scrieți cel mai mare și cel mai mic număr de trei cifre distincte ce se pot forma cu cifrele 4, 7 și 1.

❒**4.** Scrieți toate numerele ce se pot forma cu cifrele romane: L, I, V.

❒**5.** Scrieți cu cifre romane numerele:

a) 49, 65, 84;
b) 357, 568, 976;
c) 1300, 2002, 3725.

❒**6.** Alexandra, Andreea și Adi au împreună 1.000.000 lei. Alexandra și Andreea au împreună 550.000 lei, iar Adi și Andreea au împreună 750.000 lei. Câți lei rămân fiecăruia dacă la Mc. Donalds Alexandra a cumpărat un chesburger și capy nectar, Adi un hamburger dublu și o coca-cola, iar Andrea o salată de fructe și o coca-cola, iar în lista de prețuri figura: hamburger dublu 37.000 lei, chesburger 25.000 lei, coca-cola 10.000 lei, capy nectar 18.000 lei, salată de fructe 27.000 lei.

❒**7.** Mihaela și Mihai au economisit împreună 320.000 lei. Numărându-i, Mihai constată că dacă-i dă Mihaelei 10.000 lei, au aceeași sumă. Ce sumă are fiecare?

❒**8.** Triplul numărului 746 este egal cu dublul unui alt număr. Calculați acest număr.

❒**9.** Suma a trei numere este 72454. Primul număr este de trei ori mai mic decât al doilea și de patru ori mai mare decât al treilea. Calculați numerele.

❒**10.** Suma a trei numere este 43257. Calculați numerele știind că al doilea este de 2 ori mai mare decât primul și cu 257 mai mic decât al treilea.

❒**11.** Calculați diferența dintre cel mai mare număr de trei cifre distincte și cel mai mic număr impar de trei cifre.

❒**12.** Suma a două numere este 500. Dacă micșorăm primul număr cu 30, iar pe al doilea îl mărim cu 50, calculați noua sumă.

❒**13.** Scrieți cel mai mic număr de trei cifre:
a) distincte;
b) identice;
c) consecutive;
d) a căror sumă să fie 7.

❒**14.** În clasa a V-a sunt 24 de elevi. Numărul fetelor este de trei ori mai mare decât numărul băieților. Câte fete și câți băieți sunt în clasă.

❒**15.** 4 albume costă 160.0000 lei. Cu valoarea a trei albume se pot cumpăra 2 stilouri. Calculați cât costă 5 stilouri de același model.

❒**16.** Mihaela citește o carte care are 150 pagini. Luni a citit 10 pagini, iar în zilele următoare cu câte 5 pagini mai mult decât în ziua precedentă. Câte pagini va mai avea de citit Mihaela duminică?

❒**17.** Calculați diferența dintre deîmpărțit și împărțitor, știind că împărțitorul este 27, câtul reprezintă $\frac{2}{3}$ din împărțitor, iar restul este cel mai mare număr de o cifră.

❒**18.** Aflați cel mai mic număr de trei cifre care împărțit la 9 dă restul 7.

❒**19.** Aflați cel mai mare număr de trei cifre care împărțit la 99 dă restul 77.

❒**20.** Scrieți succesorul și predecesorul celui mai mare număr de două cifre distincte.

❒**21.** Calculați a din:
a) 235 402 + a = 236 702
b) 53 201 – a = 23 141
c) a + 17 123 = 25 432
d) a – 25 754 = 14 123
e) 48 045 : a = 3203

f) a : 24 573 = 137
g) 73 121 · a = 1 754 904
h) a · 4 312 = 90 552

❒**22.** Fie a = 127 – 3·12, b = 134 + 2·17 + 432:12 și c = 17·12 – 576:24 – 12. Calculați:
a) 11·a – 3·(b – c);
b) 3·a + 2·b – c;
c) 4·(a + b) – 5c.

❒**23.** Aflați x din:
a) (12 + x) + 14 = 4·x – 4;
b) (3·x + 2) : 4 – 2 = 3;
c) [(x + 3) · 3 + 3] · 3 + 3 = 102;
d) 5 · x : 2 = 1025.

❒**24.** Știind că a + b = 14 și b + c = 9, calculați:
a) 2 · a + 5 · b + 3 · c;
b) 3 · a + 5 · b + 2 · c;
c) a + 8 · b + 7 · c.

❒**25.** Știind că a = 10 și b = 7, calculați:
a) (2 · a + 3 · b) · (a – b);
b) (3·a – b) · (2· a + b);
c) (a + b) · (2·a + 5 – 3 · b).

❒**26.** Fie numerele:
a = 40 + 60:2 – 20; b = (17 + 17·4):17 și
c = (37·3 – 37):74.
Calculați 5·a + 4·b – 3·c + 33.

❒**27.** Scrieți în ordine crescătoare numerele:
A = 7360 – [(5 + 206·8) – 709],
B = 6 + 8·[14·6 + 3·(7·9 – 4·5)]
C = 2 + 10·[632 + 10·(14 + 14:7)] și
D = 40 + 3·{32:8 + 3·[50 + 3·(200:4 – 98:2)]}

❒**28.** Dacă A = 2001·2003 – 2001·2002 și B = 17·63 + 17·37 – 17·50, calculați: A + B, A – B, A·B și (A + 549):B.

❒**29.** Calculați câtul dintre triplul numărului A și dublul numărului B, unde:
A = 6980 + 2000:[(200:10 – 10)·10] + 11 510 și
B = 9 000 + 22 090 : (346 + 124):(40 + 21:3)·105.

❒**30.** Calculați:
a) 7m + 15dm – 123cm + 4257mm;
b) 124dam + 232m – 180dm + 21hm;
c) $\frac{3}{4}$ kg – 25dag + $\frac{1}{2}$ dag + 500 cg;
d) 200g + 320cg – 80dg + 2530 mg;
e) 17ℓ + 120dl – 2800 cl + 6dal;
f) 80kl – 400hl + 3000dal – 123ℓ;
g) 260s + 15min + 3h – 14min;
h) 4h 15min 30s – 2h 25min 15s;
i) $28dam^2 + 4800dm^2 – 46m^2$;
j) $7ha – 7ari + 7m^2 – 7dm^2$.

NUMERE NATURALE

1. Scrierea și citirea numerelor naturale; șirul numerelor naturale. Aproximări; rotunjiri

✎ ***Numerele naturale*** *se scriu cu ajutorul* ***cifrelor arabe****; acestea sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9. Uneori se folosesc* ***cifrele romane****: I, V, X, L, C, D și M care reprezintă numerele: 1, 5, 10, 50, 100, 500 respectiv 1000.*

✎ *Numerele naturale scrise în ordinea: 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, ..., 99, 100, 101, ..., 999, 1000, 1001, ..., 9999, 10000, ... formează* ***șirul numerelor naturale****.*

✎ *Fie n un număr natural oarecare; atunci numerele n și n + 1 se numesc* ***numere consecutive****.*

✎ *Un număr natural oarecare de două cifre se reprezintă prin scrierea* $\overline{ab}$*, unde a și b desemnează cifre (nu neapărat diferite!) și a ≠ 0; un număr natural oarecare de trei cifre se reprezintă prin scrierea* $\overline{abc}$*, unde a, b și c desemnează cifre și a ≠ 0 și așa mai departe.*

Observație:

La citirea și scrierea numerelor cu ajutorul cifrelor romane trebuie să ținem cont de:

- **1.** *O cifră cu o valoare mai mică scrisă la dreapta uneia cu o valoare mai mare indică o sumă:*
  XII = X + II, *adică* 12.
- **2.** *O cifră cu o valoare mai mică scrisă la stânga uneia cu o valoare mai mare indică o scădere:*
  XC = C – X, *adică* 90.
- **3.** *Cifrele I, X, C, M pot fi scrise consecutiv de cel mult trei ori.*
- **4.** *Nu se pot repeta consecutiv cifrele V, L, D.*
- **5.** *Orice cifră sau grup de cifre subliniată superior cu o linie este multiplicată de 1000 de ori:*
  $\overline{X}$ reprezintă 10 000;
  $\overline{L}$ reprezintă 50 000;
  $\overline{XC}$ reprezintă 90 000.

✎ ***Aproximarea prin lipsă*** *până la zeci (sute, mii ş.a.m.d.) este cel mai mare număr, mai mic sau egal cu numărul respectiv format numai din zeci (sute, mii ş.a.m.d.).*

EXEMPLE:

1. Aproximarea prin lipsă până la zeci a numărului 57873 este 57870.
2. Aproximarea prin lipsă până la sute a numărului 57873 este 57800.
3. Aproximarea prin lipsă până la mii a numărului 57873 este 57000.

✎ ***Aproximarea prin adaos*** *până la zeci (sute, mii ş.a.m.d.) este cel mai mic număr, mai mare sau egal cu numărul respectiv format numai din zeci (sute, mii ş.a.m.d.).*

EXEMPLE:

1. Aproximarea prin adaos până la zeci a numărului 57873 este 57880.
2. Aproximarea prin adaos până la sute a numărului 57873 este 57900.
3. Aproximarea prin adaos până la mii a numărului 57873 este 58000.

✎ ***Rotunjirea*** *până la zeci (sute, mii ş.a.m.d.) este aproximarea prin lipsă sau prin adaos cea mai apropiată de valoarea numărului respectiv.*

EXEMPLE:

1. Rotunjirea până la zeci a numărului 57873 este 57870.
2. Rotunjirea până la sute a numărului 57873 este 57900.
3. Rotunjirea până la mii a numărului 57873 este 58000.

Observaţie:

- *Dacă ambele aproximări prin lipsă şi prin adaos sunt la fel de apropiate de valoarea numărului, atunci rotunjirea se consideră aproximarea prin adaos.*

EXEMPLE:

1. Rotunjirea până la zeci a numărului 7865 este 7870.
2. Rotunjirea până la sute a numărului 89350 este 89400.
3. Rotunjirea până la mii a numărului 38500 este 39000.

EXERCIŢII

❒**1.** Scrieţi cu ajutorul cifrelor următoarele numere:

a) o mie opt;
b) unsprezece mii şaptezeci şi opt;
c) două sute trei mii şase sute unu;
d) un milion şaizeci şi două de mii trei sute cinci;
e) două miliarde treizeci şi unu de mii şapte.

❒**2.** Citiţi următoarele numere naturale:

a) 301; 15070; 301007; 2000510; 370501407.
b) 149803; 40731; 450031024; 204030.

❒**3.** a) Care este cel mai mic număr natural de trei cifre care are cifra zecilor 7?

b) Care este cel mai mare număr natural de patru cifre distincte care are cifra sutelor 6?

c) Care este cel mai mic număr natural de patru cifre care are cifra sutelor 6?

d) Care este cel mai mic număr natural de cinci cifre care are cifra zecilor 2?

e) Care este cel mai mic număr natural de cinci cifre distincte care are cifra zecilor 2?

❒**4.** Scrieţi toate numerele naturale:

a) mai mici decât 8;
b) mai mici sau cel mult egale cu 12;
c) nenule mai mici decât 3;
d) mai mari decât 5 şi mai mici decât 15;
e) mai mari sau cel puţin egale cu 3 şi mai mici sau cel mult egale cu 17.

❒**5.** Scrieţi cu ajutorul literelor un număr natural:

a) de patru cifre distincte;
b) de patru cifre;
c) de patru cifre astfel încât primele două cifre sunt identice;
d) de patru cifre cu cifra sutelor 7 şi cifra zecilor 2.

❒**6.** Aflaţi cel mai mic număr natural în fiecare din situaţiile:

a) este de forma $\overline{abc}$;
b) este de forma $\overline{abc}$ şi $a \neq b \neq c \neq a$;
c) este de forma $\overline{aab}$;
d) este de forma $\overline{aabc}$ şi $a \neq b \neq c \neq a$.

❒**7.** Aflați cel mai mare număr natural în fiecare din situațiile:

a) este de forma $\overline{aa}$;

b) este de forma $\overline{abc}$;

c) este de forma $\overline{abc}$ și are cifre distincte;

d) este de forma $\overline{a9bb}$ și $a \neq b$.

❒**8.** Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma $\overline{a1bb}$ cu $a \neq b \neq 1$.

❒**9.** Scrieți cu cifre romane următoarele numere scrise cu cifre arabe:

a) 37; b) 145; c) 2769; d) 957; e) 2000.

❒**10.** Scrieți cu cifre arabe următoarele numere scrise cu cifre romane:

a) XIV; b) XXVII; c) MDCCLXXXVI; d) MCMLX.

❒**11.** Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$ pentru care $x + y = z + t = 4$, iar x, y, z, t să fie distincte.

❒**12.** Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$ pentru care $x + y + z = t$, x, y, z, t să fie distincte, $t < 7$.

❒**13.** Scrieți numerele naturale de forma $\overline{xy56}$ pentru care $x + y = 5$, $x \neq y$.

❒**14.** Scrieți numerele naturale de forma $\overline{xyz}$ cu x, y, z distincte și pentru care:

a) $x + z = y$, $y \leq 4$; b) $x - z = y$.

❒**15.** Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$ în care x, y, z, t sunt:

a) numere consecutive cu $x < y < z < t$;

b) numere consecutive cu $x > y > z > t$.

❒**16.** Scrieți cu cifre arabe următoarele numere:

CIV; CDLXXV; CMXXXVIII; MCMXCVIII.

❒**17.** Mutați o singură cifră la locul potrivit pentru a obține egalitate:

a) VI + IX = XVII; b) X – VI = VI;

c) CC + IX = CCXI; d) CXC + I = CCXI;

e) MIX + IX = M; f) XL – XV = XIV + IX.

❒**18.** Efectuați:

a) MXCV – (CDXCV + XXV + XCV + XLV + V) =

b) (MCMXCVI – MD) : IV – CXXIV =

c) CXXIV + DCCXXXVIII · II – (CDLVI + CCCVIII) : IV =

❒**19.** Scrieți cu cifre romane numerele: 37, 42, 735, 1992, 2001, 3757.

❒**20.** Citiți numerele: XXVII, XLVI, XIV, XXII, LX, MCM, CIX, DCXX, MCMIV, XLVIII, IL, $\overline{X}$, $\overline{XC}$, $\overline{L}$, $\overline{XL}$, $\overline{XCV}$.

❒**21.** Scrieți toate numerele de trei cifre distincte ce se pot forma utilizând cifrele:

a) 1, 7, 4; b) 5, 0, 9.

❒**22.** Scrieți toate numerele naturale formate din trei cifre identice astfel încât suma cifrelor să fie cuprinsă între 10 și 25.

❒**23.** Scrieți toate numerele naturale de trei cifre, formate cu cifre consecutive; ordonați-le crescător.

❒**24.** a) Scrieți numerele naturale de două cifre distincte ce se pot forma cu cifrele 0, 2 și 7.

b) Scrieți numerele naturale de două cifre ce se pot forma cu cifrele 1, 4 și 9.

❒**25.** Scrieți toate numerele naturale pentru care:

a) $\overline{ab} = \overline{ba}$; b) $\overline{a7b} = \overline{b7a}$.

❒**26.** Completați spațiile libere:

a) $927 = \square \cdot 100 + \square \cdot 10 + \square$;

b) $2375 = \square \cdot 1000 + \square \cdot 100 + \square \cdot 10 + \square$;

c) $57123 = \square \cdot 10000 + \square \cdot 1000 + \square \cdot 100 + \square \cdot 2 + \square$;

d) $701034 = \square \cdot 100000 + \square \cdot 10000 + \square \cdot 1000 + \square \cdot 100 + \square \cdot 10 + \square$;

e) $24123 = \square \cdot 10^4 + \square \cdot 10^3 + \square \cdot 10^2 + \square \cdot 10 + \square$;

f) $462357 = \square \cdot 10^5 + \square \cdot 10^4 + \square \cdot 10^3 + \square \cdot 10^2 + \square \cdot 10 + \square$;

g) $1024017 = \square \cdot 10^6 + \square \cdot 10^5 + \square \cdot 10^4 + \square \cdot 10^3 + \square \cdot 10^2 + \square \cdot 10 + \square$;

h) $\square = 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 5$;

i) $\square = 7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 4$;

j) $\square = 9 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10 + 7$.

❒**27.** Scrieți toate numerele naturale formate din cifre identice a căror sumă să fie 12.

❒**28.** Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{ab57}$ astfel încât $a + b = 11$.

❒**29.** Scrieți numerele naturale de forma $\overline{abc}$, $a < c$, astfel încât:

a) $a + c = b$; b) $c - a = b$.

❒**30.** Determinați a și b astfel încât pentru $\overline{17ab24}$ produsul cifrelor să fie 672.

❒**31.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{24ab}$ astfel încât suma cifrelor să fie 13.

❒**32.** a) Scrieți trei numere naturale de forma $\overline{abcde}$ formate din cifre distincte astfel încât produsul acestora să fie nul.

b) Scrieți cel mai mare și cel mai mic număr de forma $\overline{abcde}$ formate din cifre distincte astfel încât produsul acestora să fie maxim.

❒**33.** Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ cu cifre distincte astfel încât a + d = b + c = 7.

❒**34.** Pentru fiecare din numerele: 68372, 29570, 37150, 48500, 53285 scrieți:
a) aproximarea prin lipsă până la zeci;
b) aproximarea prin lipsă până la mii;
c) aproximarea prin adaos până la sute;
d) aproximarea prin adaos până la mii;
e) rotunjirea până la sute;
f) rotunjirea până la mii.

2. Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Ordonarea numerelor naturale

✎ ***Axa numerelor*** *este o dreaptă d pe care se fixează un punct O numit* ***origine****, un* ***sens pozitiv*** *și un segment OI numit* ***unitate de măsură****. (fig. 1). În acest fel fiecărui număr natural îi corespunde pe axă un punct (fig. 2):*

- *lui 0 îi corespunde punctul O;*
- *lui 1 îi corespunde punctul I;*
- *lui n îi corespunde punctul P, care se obține măsurând pe axă, de la punctul O și în sens pozitiv, n unități de măsură. Se spune că punctul P are* ***coordonata*** *n. (În fig. 2 O are coordonata 0, I are coordonata 1, A are coordonata 2, N are coordonata 5 etc.)*

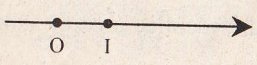


fig. 1

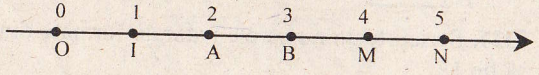
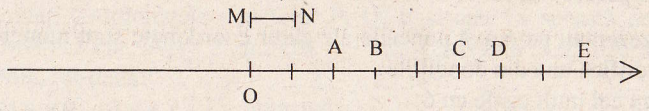


fig. 2

EXERCIȚII

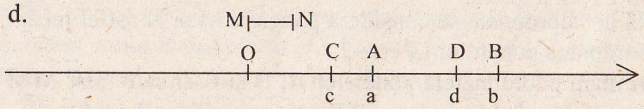
❒**1.** Desenați o axă a numerelor și reprezentați pe ea punctele corespunzătoare următoarelor numere naturale: 2; 4; 6; 9; 11.

❒**2.** În figura de mai jos avem o axă a numerelor și punctele din desen corespund unor numere naturale. Aflați aceste numere.



❒**3.** Numerele 3, 8 și 5 sunt reprezentate pe o aceeași axă a numerelor prin punctele A, B respectiv C. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare din următoarele propoziții:
p: „C este mai departe de origine ca B„
q: „C este între A și B„
r: „B este între A și C„

❒**4.** În figura de mai jos avem o axă a numerelor iar punctele A, B, C, D corespund numerelor naturale a, b, c respectiv d. Ordonați crescător numerele a, b, c, d.



❒**5.** Punctele A, B și C de pe axa numerelor corespund unor numere naturale consecutive. Se știe că A este între B și C. Aflați:
a) dacă B corespunde unui număr par atunci ce paritate au numerele care corespund punctelor A, respectiv C;
b) dacă A corespunde unui număr impar atunci ce paritate au numerele care corespund punctelor B și C;
c) dacă C corespunde unui număr impar atunci ce paritate au numerele care corespund punctelor A și B.

❒**6.** Punctele A, B, C reprezentate pe axa numerelor corespund numerelor naturale 5, 11, respectiv x. Aflați valorile posibile ale lui x dacă:
a) C este între A și B;
b) A este între C și B.

❒**7.** Punctele A, B, C sunt în această ordine pe axa numerelor și ele corespund unor numere naturale consecutive. Punctul D este și el între A și C și corespunde unui număr natural. Comparați numerele care corespund punctelor B și D.

❒**8.** Punctele A şi D sunt de aceeaşi parte şi sunt situate între punctele B şi C pe axa numerelor. Distanţa între B şi C este de 3 unităţi. Comparaţi numerele care corespund punctelor A şi D.

❒**9.** Punctele A, B, C corespund numerelor naturale a, b respectiv c. Stabiliţi ordinea punctelor A, B şi C pe axa numerelor ştiind că: a este predecesorul lui b şi este succesorul lui c.

❒**10.** Reprezentaţi pe o axă punctele ale căror coordonate sunt numere naturale care verifică una din condiţiile:

a) sunt cel mult egale cu 6;
b) sunt cel puţin egale cu 2, dar mai mici decât 8;
c) sunt cuprinse între 1 şi 11 şi sunt impare;
d) sunt cuprinse între 2 şi 8 şi sunt pare.

❒**11.** Pe o axă de coordonate se consideră punctele: M, N, P, Q, R de coordonate: 2, 5, 7, 8, 10, unitatea de măsură fiind de 1 cm.

a) Determinaţi lungimile segmentelor MN, MP, MQ, MR, NP, NQ, NR, PQ, PR, QR.

b) Calculaţi MR + MQ – 2MN; 2NP + 3NR – NQ; 4QR + 5PQ – 2PR.

❒**12.** Pe o axă de coordonate se consideră punctele M şi N astfel încât ON = = 11 cm şi coordonata punctului M este 2.

a) Determinaţi coordonatele punctelor A, B şi C situate între M şi N în această ordine astfel încât MA = 1 cm, AB = 5 cm şi CN = 2 cm.

b) Calculaţi lungimile segmentelor MB, BC, BN, AN, MN.

❒**13.** Ordonaţi crescător numerele: 128, 235, 57, 156, 463, 349.

❒**14.** Ordonaţi descrescător numerele: 281, 354, 79, 561, 631, 492.

❒**15.** a) Scrieţi toate numerele naturale impare mai mici decât 17.
b) Scrieţi toate numerele naturale pare mai mici decât 11.

❒**16.** a) Scrieţi cel mai mic număr par de trei cifre diferite.
b) Scrieţi cel mai mare număr par de trei cifre identice.
c) Scrieţi cel mai mic număr impar de patru cifre identice.
d) Scrieţi cel mai mare număr impar de patru cifre diferite.

❒**17.** Care număr este mai mic din următoarele perechi de numere:

a) 977, 975; b) 5323, 5322; c) 50.001, 500.001;
d) 43575, 43757; e) 423, 432; f) 10011, 10101.

❒**18.** Alegeţi convenabil unitatea de măsură şi reprezentaţi pe axă numerele: 10, 30, 40, 60.

❒**19.** Reprezentaţi pe axa numerelor punctele ale căror coordonate sunt numerele naturale:

a) 2; 4; 5; 7; 10;
b) cel mult egale cu 7;
c) cuprinse între 3 şi 8.

❒**20.** Fie segmentul MN cu lungimea de 8 cm. Dacă M este de coordonată x, determinaţi coordonatele punctelor P, Q, R situate în această ordine, astfel încât MP = 3 cm, PQ = 2 cm, QR = 1 cm. Care este lungimea segmentelor MQ, MR, PR dacă:

a) x = 0; b) x = 3? Ce observaţi?

❒**21.** Fie numărul 879543. Plasaţi cifra 1 între două cifre ale numărului pentru a obţine:

a) cel mai mare număr;
b) cel mai mic număr.

3. Adunarea numerelor naturale

✎ *Oricare ar fi două numere naturale a şi b există c, număr natural unic, numit* ***suma*** *numerelor a şi b şi notat a + b, a şi b fiind numiţi* ***termenii sumei****.*

✎ *Operaţia prin care se obţine suma a două numere naturale se numeşte* ***adunarea numerelor naturale*** *şi are următoarele proprietăţi:*

- *este* ***asociativă****, adică oricare ar fi a, b şi c numere naturale, atunci*

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

- *numărul 0 este* ***element neutru*** *la adunare, adică oricare ar fi numărul natural a, atunci*

$$a + 0 = 0 + a = a;$$

- *este* ***comutativă****, adică oricare ar fi numerele naturale a şi b, atunci*

$$a + b = b + a.$$

✎ *Adunarea numerelor naturale, relaţia de egalitate „=“ şi relaţia de ordine „≤“ între numerele naturale sunt legate prin următoarele proprietăţi: oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi d,*

- *dacă a = b, atunci a + c = b + c;*
- *dacă a ≤ b, atunci a + c ≤ b + c;*
- *dacă a ≤ b şi c ≤ d, atunci a + c ≤ b + d.*

Problemă rezolvată

a) Arătați că: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Calculați suma: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Soluție:

a) Fie $A = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$ $\Big]^{(+)}_{\Rightarrow}$
Tot $A = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$ $\Big]$

$A + A = (n + 1) + [(n - 1) + 2] + [(n - 2) + 3] + \ldots + [(n - 2) + 3] + [(n - 1) + 2] + (n + 1)$.

Deci $2A = (n + 1) + (n - 1 + 2) + (n - 2 + 3) + \ldots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) \Rightarrow 2A = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{\text{de n ori } (n+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2A = n(n + 1) \Rightarrow A = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Facem $n = 100$ și utilizăm rezultatul de la a): $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = \frac{100(100+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{10100}{2} = 5050$.

EXERCIȚII

❒**1.** Calculați:
a) 72619 + 83578;
b) 512387 + 97485 + 783697;
c) 435 + 721 + 565 + 39;
d) 2537 + 2308 + 1105.

❒**2.** Descompuneți în sumă de unități, zeci, sute etc., după caz, numerele:
575, 49, 3 754, 125 431, 1 237 403.

❒**3.** Scrieți numărul 7 ca sumă de două numere naturale. Câte soluții are problema?

❒**4.** Efectuați, folosind proprietățile adunării:
a) 73 + 58 + 27 + 42;
b) 2937 + 1429 + 63;
c) 12 + 77 + 8 + 3;
d) 27 + 195 + 23 + 205;
e) 19 + 46 + 181 + 54;
f) 2301 + 389 + 1499 + 511;

g) 425 + 3241 + 575 + 1759;
h) 879 + 253 + 121 + 247.

❒**5.** Completați spațiile marcate și denumiți proprietățile utilizate:
a) 14 + □ = 14; □ + 24 = 24; □ + 0 = 74; 0 + □ = 99;
b) 19 + 37 = 37 + □; 49 + □ = 54 + 49;
c) (16 + 24) + □ = 16 + (24 + □);
d) (12 + 137) + 15 = □ + (15 + 12).

❒**6** Calculați a + 23574 pentru a luând valorile:
3205; 25734; 16105; 50037; 94376.

❒**7.** Scrieți numărul 18 ca o sumă de 8 numere care conțin ca cifră numai cifra 1.

❒**8.** a) Suma a 6 numere naturale pare distincte este 30. Aflați numerele.
b) Suma a 10 numere naturale impare distincte este 100. Aflați numerele.

❒**9.** Suma a 10 numere naturale impare este 98. Arătați că cel puțin două dintre ele sunt egale.

❒**10.** Completați tabelul următor:

a	327	1239	23432	57	124329	37452	19624
b	452	327	2342	2437	3247	4295	5732
a + b	779						

❒**11.** Completați tabelele:

a)

a	47	529	1435	132456	799457	2437560
a + 325						

b)

b	12	125	437	24573	456124	257432124
b + 5237						

❒**12.** Calculați:
a) 2 + 97 + 5 + 998 + 3 + 2995;
b) 113 + 124 + 1257 + 1376 + 1387 + 4743;
c) 401 + 4502 + 4203 + 419 + 4018 + 4057;
d) 1213 + 456 + 1579 + 4287 + 9044 + 1421.

❒**13.** Calculați următoarele sume:
a) 1 + 2 + 3 + … + 80; b) 2 + 4 + 6 + … + 100;
c) 1 + 3 + 5 + … + 99; d) 3 + 7 + 11 + 15 + … + 43.

❒**14.** Calculați:

a) 3 + 6 + 9 + 12 + ... + 2001;
b) 4 + 8 + 12 + ... + 2000;
c) 5 + 10 + 15 + ... + 2000;
d) 7 + 14 + 21 + ... + 2002;
e) 17 + 34 + 51 + ... + 2006.

❒**15.** Completați tabelul:

a	29	2375	537	24523	1754	21375
b	137	123	9754	41127	324	41325
c	453	49	4375	5432	5	2943
a + b						
a + c						
b + c						
a + b + c						

❒**16.** Folosind proprietățile adunării numerelor naturale, calculați:

a) 574 + 875 + 26 + 25;
b) 2 036 + 871 + 64 + 329 + 50;
c) 2001 + 999 + 5 825 + 2 175;
d) 701 + 703 + 500 + 307 + 309;
e) 2301 + 3698 + 689 + 302;
f) [(324 + 76) + 100] + (109 + 16 + 1).

❒**17.** Cu cât se modifică suma a două numere a și b dacă:

a) unui termen i se adaugă 500?
b) ambilor termeni li se adaugă 500?
c) un termen se dublează?
d) ambii termeni se dublează?
e) unui termen i se adaugă 500, iar celuilalt i se adaugă 100?
f) ambilor termnei li se adaugă zero?

❒**18.** Scrieți aproximarea prin lipsă și prin adaos până la mii pentru fiecare rezultat obținut la adunările:

a) 4 257 + 917;
b) 275 + 7 621;
c) 2 347 + 632;
d) 17 430 + 2 047;
e) 27 570 + 8 129;
f) 48 100 + 6 737.

❒**19.** Rotunjiți până la mii următoarele sume:

a) 789 + 837;
b) 3 578 + 124;
c) 7 431 + 1 242;
d) 14 320 + 5 737;
e) 72 815 + 42 300
f) 30 147 + 2 354.

❒**20.** Întreprinderea *Madre Pancom* a cheltuit pentru procurarea materiei prime într-o săptămână suma de 89 737 235 lei. În săptămâna următoare a cheltuit cu 17 147 500 mai mult.

a) Calculați cât a cheltuit în cele două săptămâni.
b) Aproximați prin lipsă la mii suma cheltuită.
c) Rotunjiți la mii suma cheltuită.

❒**21.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare din următoarele propoziții:

p: „Suma a 7 numere pare este un număr impar".
q: „Suma a 10 numere impare este un număr par".
r: „Suma a 7 numere impare este un număr impar".

❒**22.** Fie a, b, c trei numere naturale astfel încât a + b = c.

a) Dacă a și b sunt numere pare aflați ce paritate are numărul c.
b) Dacă a este număr par și b este număr impar aflați ce paritate are numărul c.
c) Dacă a este număr par și c este număr par aflați ce paritate are numărul b.
d) Dacă a este număr par și c este număr impar aflați ce paritate are numărul b.

❒**23.** Fie șirul de numere 2, 7, 12, 17, ...

a) Completați șirul cu încă trei termeni.
b) Aflați termenul de pe locul 27.
c) Calculați suma primilor 15 termeni.

❒**24.** Calculați suma: $9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{de 1998 ori 9}}$.

❒**25.** Suma unor numere naturale consecutive este 75. Aflați numerele.

4. Scăderea numerelor naturale. Paranteze; ordinea efectuării operațiilor

✎ *Oricare ar fi două numere a şi b, a ≥ b, există c, număr natural unic, numit* ***diferență*** *şi notat cu a – b; a şi b se numesc* ***termenii diferenței****: a se numeşte* ***descăzut****, iar b* ***scăzător****.*

✎ *Operația prin care se obține diferența a două numerele naturale se numeşte* ***scădere****.*

Observații:

- **1)** *diferența a – b are sens numai dacă a ≥ b;*
- **2)** *scăderea nu este comutativă, nici asociativă şi nu are element neutru;*
- **3)** *au loc următoarele proprietăți: oricare ar fi numerele naturale a, b şi c avem:*

$$a - (b + c) = (a - b) - c;$$
$$a - (b - c) = (a - b) + c;$$
$$a - 0 = a;$$

  - *dacă a = b, atunci a – c = b – c;*
  - *dacă a < b, atunci a – c < b – c.*

  (Se subînțelege că aceste proprietăți au loc numai dacă diferențele au sens.)
- **4)** *În egalitatea a – b = c se poate pune în evidență fiecare termen al diferenței astfel:*

$$a = c + b \text{ şi } b = a - c.$$

✎ *În unele calcule se folosesc paranteze:* ***rotunde*** *(numite şi mici),* ***drepte*** *(numite şi mari),* ***acolade****. În acest caz, mai întâi se fac calculele din parantezele rotunde, apoi din parantezele drepte şi în final cele din acolade. Dacă sunt numai operații de adunare şi scădere, acestea se fac în ordinea în care sunt scrise.*

EXEMPLU:

$$\begin{aligned} &9 + \{12 - [18 - (4 + 7 - 3 - 1)] + 1\} = \\ &= 9 + \{12 - [18 - (11 - 3 - 1)] + 1\} = \\ &= 9 + \{12 - [18 - (8 - 1)] + 1\} = \\ &= 9 + [12 - (18 - 7) + 1] = \\ &= 9 + (12 - 11 + 1) = \\ &= 9 + (1 + 1) = 9 + 2 = 11. \end{aligned}$$

Observație:

- *După efectuarea calculelor din parantezele rotunde, acestea se desființează, cele drepte se transformă în rotunde, iar acoladele se transformă în paranteze drepte şi se continuă calculul până la dispariția parantezelor şi obținerea rezultatului.*

EXERCIŢII

❒**1.** Completați tabelul:

a	b	a – b	a – 325	b – 124	a–b–11	a+b–120
537	237					
1275	1055					
3423	2403					
11437	10107					
132140	13200					

❒**2.** Calculați:

a) 7093 – 5197;
b) 56108 – 17539;
c) 147523 – 83485 – 19784;
d) 3892 + 17437 – 892;
e) 41375 + 92387 – 375 – 387;
f) 4137 + 13253 – 2372.

❒**3.** Aflați valoarea de adevăr pentru fiecare din următoarele propoziții:

p: „583 + (295 – 187) = 583 + 295 – 187„.
q: „607 – (145 + 238) = 607 – 145 – 238„.
r: „497 – (375 – 183) = 497 – 375 + 183„.

❒**4.** Efectuați:

a) 45372 – 23125 – 12023;
b) 23403103 – 12413042 – 7214052;
c) 577775 – 22222 + 11999;
d) 10765 – 9421 + 237412;
e) 45002 + 23174 – 14123;
f) 75834 + 23757 – 11237.

❒**5.** a) Descăzutul este 8431 şi diferența este 3256. Care este scăzătorul?
b) Scăzătorul este 15737, iar diferența este 15263. Care este descăzutul?

❒**6.** Puneți paranteze astfel încât rezultatul să fie zero:
a) 530 – 439 – 348 – 257;
b) 880 – 661 – 631 – 412;
c) 6464 – 5008 – 3552 – 2096;
d) 24860 – 35765 – 15680 – 4775;
e) 1237 – 1237 – 15285 – 12960 – 1185 – 1140;
f) 56470 – 80514 – 9040 – 13001 – 2003.

❒**7.** Calculați a – 12753 + 753 pentru a luând valorile:
825137; 20000; 137125; 57834; 45723; 834125.

❒**8.** a + c = 718 și b + d = 523. Calculați:
a) a + b + c + d;
b) a – b + c – d.

❒**9.** Aflați diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr de cinci cifre distincte.

❒**10.** Determinați numerele de forma $\overline{xy}$ știind că suma cifrelor sale este 10 și răsturnatul său este cu 36 mai mic decât el.

❒**11.** Diferența dintre două numere naturale este 23945, iar cel mai mare dintre aceste numere este 123945. Care este diferența dintre numărul cel mic și 8423?

❒**12.** Calculați:
a) x + [y – (z + t)] pentru x = 1573, y = 2197, z = 235 și t = 957;
b) x – [z – (t – y)] pentru x = 1754, y = 317, z = 1375 și t = 537;
c) (x – y) – (z – t) pentru x = 42157, y = 29793, z = 15004 și t = 14229;
d) x – (y + z – t) – y + t pentru x = 3000, y = 200, z – t = 350 și t = 70.

❒**13.** Comparați numerele x și y pentru:
a) x = 320 – (150 – 40); y = (320 – 120) – 40;
b) x = 575 – (235 + 100); y = (575 – 235) + 100;
c) x = 420 + (20 + 205); y = (420 + 20) + 205;
d) x = 3950 – (1030 – 937); y = (3950 – 1030) + 937;
e) x = 5200 – [700 – (100 – 30)]; y = (5200 – 700) + 100 – 30.

❒**14.** Fie x, y și z trei numere naturale astfel încât x – y = z.
a) Dacă x = 1253 și y = 937, calculați z.
b) Dacă x = 21737 și z = 11253, calculați y.

❒**15.** Înlocuiți steluțele cu cifrele corespunzătoare:
a) 7∗9∗ – ∗8∗6 = 1558;
b) 4∗73 – 285∗ = ∗3∗4.

❒**16.** Aflați numerele $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ care verifică egalitatea: $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$.

❒**17.** Stabiliți dacă există două numere naturale care adunate dau ca rezultat un număr par și scăzute dau ca rezultat un număr impar.

❒**18.** Calculați diferența dintre cel mai mare număr natural de cinci cifre distincte și cel mai mic număr natural de cinci cifre distincte.

❒**19.** Fie a, b două numere naturale astfel încât: a + x = 2137 și b – x = 1752. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare din următoarele propoziții:
p: „Diferența numerelor a și b este număr par„
q: „Diferența numerelor a și b este număr impar„

❒**20.** Stabiliți dacă există numere naturale a, b, c care verifică simultan egalitățile: a + b = 1973; b – c = 1547 și a – c = 147.

❒**21.** Un elev are suma de 300 000 lei pe care o cheltuiește în 3 zile. În prima zi cheltuiește 78 000 lei, în a doua zi cheltuiește cu 15 000 lei mai puțin decât în prima zi. Aflați:
a) câți lei cheltuiește elevul în primele două zile ?
b) câți lei cheltuiește elevul în ultimele două zile ?

❒**22.** Diferența a două numere naturale este egală cu 23 954, iar cel mai mare dintre ele este 102 446. Care este diferența dintre numărul mic și 47 124?

❒**23.** La plecarea din București kilometrajul mașinii lui Mihai indica 12 450 km, iar la sosirea în Deva 12 839 km. Mihai pleacă apoi la Onești și citește kilometrajul mașinii care indica 13 220 km. Calculați distanțele București-Deva, Onești-Deva și distanța totală parcursă de Mihai.

❒**24.** Comparați numerele a și b, știind că:
a) a = 780 – (140 – 40); b = (780 – 140) – 40;
b) a = 725 – (375 + 100); b = (725 – 375) + 100;
c) a = 270 + (20 + 210); b = (270 + 20) + 210;

5. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu operații de adunare și scădere

✎ *Fie a și b două numere naturale date. Se formulează două* ***cerințe*** *(sau* ***probleme****):*

- ***Să se determine numărul natural x astfel încât:***

$$x + a = b.$$

- ***Să se determine numerele naturale x astfel încât:***

$$x + a < b.$$

De obicei aceste cerințe se formulează astfel:

- ***Să se rezolve (în mulțimea numerelor naturale) ecuația:***

$$x + a = b.$$

- ***Să se rezolve (în mulțimea numerelor naturale) inecuația:***

$$x + a < b.$$

În acest context x se numește ***necunoscuta*** *ecuației (inecuației).*

A rezolva ecuația (inecuația) *înseamnă a afla pe x; x aflat se numește* ***soluția ecuației (inecuației).***

EXEMPLE:

a) ecuații: $x + 17 = 23$; $x + 7 = 5$; $x - 2 = 3$; $8 - x = 4$;

b) inecuații: $x + 3 < 4$; $x - 3 > 2$; $x + 7 < 1$; $3 - x < 2$; $9 - x \geq 2$; $x + 5 > 4$; $x + 5 \geq 3$.

Observație:

● *Rezolvarea unei ecuații se bazează pe priceperea de a pune în evidență în suma $a + b = s$ fiecare termen al sumei:*

$$a = s - b;\ b = s - a$$

sau în diferența $a - b = d$, fiecare termen al diferenței:

$$a = b + d;\ b = a - d.$$

EXERCIȚII

❒1. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $x + 2174 = 5074$; b) $x - 1079 = 32105$;
c) $19703 - x = 8347$; d) $2173 + x + 11437 = 25719$;
e) $314 + 7819 - 5274 + x = 10101$;
f) $21307 + 5907 + x = 43719 + 19307$;
g) $210 + 147 = x + 319$; h) $1973 + (x - 73) = 2135$;
i) $2107 - (319 - x) = 2083$.

❒2. Care din numerele naturale 235, 1372, 12375 verifică egalitățile:

a) $3725 - 1968 - (437 - x) = x + 1320$;
b) $12375 - 10371 - (4375 - x) = x - 2371$;
c) $7470 - (x - 375) - 6845 = 1000$.

❒3. Determinați termenul necunoscut din:

a) $235 + 157 - 85 = 375 + x - 207$;
b) $1357 + x = 34032 - 20910$;
c) $1243 - 755 = 71 + x - 375$;
d) $8752 - x = 8290 - 540 - 2815$;
e) $483 + 375 - x = 270 - 3427 - 195$;
f) $3425 - 2357 + x = 1204 + 2903 - 387$.

❒4. Rezolvați în **N** ecuațiile:

a) $x + 37 = 75$; b) $4275 + x = 11111$;
c) $x - 47 = 93$; d) $457 - x = 237$;
e) $475 - x = 237 - 123$; f) $1275 + x = 2357 - 103$.

❒5. Determinați x din:

a) $x + (49 - 19) = 217$; b) $5 - x + 7 = 9$;
c) $x - (521 - 41) = 29$; d) $(623 - 295) - x = 70$;
e) $57 - (32 + 10 + x) = 10$; f) $200 - x + 375 = 156$;
g) $(99 - 18 + x) - 43 = 126$; h) $(119 - 69 - x) - 17 = 22$;
i) $275 - (54 + 103 + x) = 117$; j) $(324 - 114 + 22) - x = 123$.

❒6. Determinați pe x din:

a) $80 - (30 + 10 - x) = 60$; b) $x - (540 - 420) = 70$;
c) $(89 - 17 + x) - 24 = 48$; d) $(117 - 47 - x) - 31 = 34$;
e) $(304 - 117 + 27) + x - 15 = 300$; f) $(903 - 124 + 31) - x = 400$;
g) $70 + x - 30 + 120 = 250$; h) $376 - (25 + 107 - x) = 319$.

❒7. Precizați care din numerele 0, 2, 3, 7 este soluție a inecuației:

a) $x + 13 \leq 17$; b) $372 \geq x + (251 + 120)$;
c) $x - 7 \leq 572 - 568$; d) $104 - 89 < x + 14 \leq 324 - 304$;
e) $x + 724 \geq 730$; f) $x + 136 \geq 237 - 154$.

❒8. Aflați numerele naturale x care sunt soluții pentru fiecare din următoarele inecuații:

a) $x + 5 < 9$; b) $x - 2 \leq 5$;
c) $x + 1997 \leq 2000$; d) $1217 + x \leq 1221$;
e) $182 - 153 \geq x + 19$.

❒**9.** Determinați valorile lui x dacă:
$x - 120 \leq 215$,
$250 - x \leq 40$,
$x + 40 \geq 320$, unde x este număr natural.

❒**10.** Determinați numerele naturale care verifică relațiile:
a) $(x + 3) - (130 - 110) \geq 37$;
b) $(x + 123) - (237 - 157) > 201$;
c) $(67 - 42) - (x + 11) \geq 0$;
d) $(837 - 529) - (x + 49) > 135$;
e) $(17 - 13) - (7 - x) < 0$;
f) $(1437 - 1320) + (250 - x) > 100$.

❒**11.** Să se determine numerele naturale care verifică:
a) $12 \leq x - 3 \leq 27$;
b) $123 \leq x - 100 \leq 149$;
c) $225 \leq x + 100 \leq 237$;
d) $4 \leq 4 + x \leq 9$;
e) $107 \leq x + 70 \leq 197$;
f) $100 \leq 50 + x \leq 175$.

❒**12.** Determinați numerele naturale care verifică relațiile:
a) $(x + 3) - (120 - 70) \geq 50$;
b) $(75 - 40) - (x + 5) \geq 0$;
c) $(21 - 17) - (5 - x) < 0$;
d) $(527 - 432) - (x + 15) \geq 50$;
e) $(176 - 38) + (250 - x) > 380$;
f) $(47 - 18 + x) - 23 \leq 10$;
g) $25 \leq x - 4 \leq 35$;
h) $137 \leq x - 100 \leq 140$;
i) $121 \leq x + 100 \leq 125$;
j) $199 \leq x + 198 \leq 200$.

❒**13.** Suma a trei numere naturale este 573. Primul număr este cel mai mare număr par mai mic decât 125, al doilea număr este cu 47 mai mic decât primul. Calculați al treilea număr.

❒**14.** Mihaela primește de la mama ei 17450 lei, iar de la tata cu 2537 mai puțin și-i adaugă economiilor ei. Din aceștia Mihaela a cheltuit 39573 lei. Câți lei a cheltuit Mihaela din economiile ei?

❒**15.** Mihai dorește să cumpere trei articole. El constată că primul articol costă cu 12300 lei mai puțin decât al doilea, iar al treilea costă cu 25375 lei mai mult decât al doilea, adică 87534 lei. De câți lei trebuie să dispună Mihai pentru a cumpăra cele trei articole?

❒**16.** Suma dintre un număr natural de două cifre și răsturnatul său este 77. Calculați numerele.

❒**17.** Aflați trei numere naturale a, b, c care verifică simultan egalitățile:
$a + b = 28$; $b + c = 16$ și $c + a = 20$.

❒**18.** Suma a două numere este 192 iar diferența lor este 46. Aflați numerele.

❒**19.** Un număr este mai mare decât altul cu 121 iar suma lor este 473. Aflați numerele.

❒**20.** $a + b + c = 32$ și $a = 15 - b$. Aflați numărul c.

❒**21.** Aflați numărul x care verifică egalitatea:
$1 + 3 + 5 + \ldots + 99 + x = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$.

❒**22.** Patru elevi au împreună suma de 106000 lei. Se știe că primii doi elevi au cu 10000 lei mai mult decât ultimii doi, primul are cu 4000 lei mai puțin decât al doilea și al patrulea are cu 8000 lei mai mult decât al treilea. Aflați ce sumă de bani are fiecare din cei patru elevi.

❒**23.** Avem un șir de numere naturale care verifică următoarele condiții:
i) primul număr din șir este 18;
ii) fiecare termen al șirului este mai mare cu 7 decât cel dinaintea lui.
Aflați ce termen al șirului este situat pe locul 10 și calculați suma primilor 20 de termeni ai șirului.

❒**24.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale:
a) $x + 1000 \leq 1325$ și $x \geq 124$;
b) $2137 + x \leq 2514$ și $x + 43 \geq 57$;
c) $(250 - x) - 130 \geq 70$ și $x + 50 \geq 70$.

6. Înmulțirea numerelor naturale

✎ *Oricare ar fi două numere naturale a și b există c, număr natural unic, numit* ***produsul*** *numerelor a și b și notat* $a \cdot b$; *a și b se numesc* ***factorii produsului***.

✎ *Operația prin care se obține produsul a două numere naturale se numește* ***înmulțirea numerelor naturale*** *și are următoarele proprietăți:*

- *este* ***asociativă****, adică oricare ar fi a, b și c numere naturale, atunci*
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$
- *numărul 1 este* ***element neutru*** *la înmulțire, adică oricare ar fi numărul natural a, atunci*
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$$
- *este* ***comutativă****, adică oricare ar fi numerele naturale a și b. atunci* $a \cdot b = b \cdot a$;

- *este **distributivă** față de adunare și scădere, adică oricare ar fi numerele naturale a, b și c, atunci*

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *și* $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$;

- *oricare ar fi numărul natural a, atunci*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

✎ *Înmulțirea numerelor naturale, relația de egalitate „=" și relația de ordine „≤" sunt legate prin următoarele proprietăți: oricare ar fi numerele naturale a, b, c și d avem:*

- *dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$;*
- *dacă $a \leq b$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot c$;*
- *dacă $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot d$.*

Observație:

● *Adunarea și scăderea sunt **operații de ordinul întâi**, iar înmulțirea este **operație de ordinul al doilea**. În calcule se fac mai întâi operațiile de ordinul al doilea, apoi cele de ordinul întâi, iar operațiile de același ordin se fac în ordinea scrierii lor.*

EXERCIȚII

❒**1.** Calculați:

a) $17 \cdot 10$; b) $203 \cdot 1000$; c) $1007 \cdot 100$;
d) $83 \cdot 9$; e) $907 \cdot 80$; f) $175 \cdot 87$;
g) $2078 \cdot 803$; h) $542 \cdot 237$; i) $785 \cdot 342$.

❒**2.** Completați tabelul:

a	b	c	a·b	a·c	b·c	a·b·c	(a·b)·c
24	32	17					
137	19	1					
2	149	372					
14	27	35					
3124	121	7					
110	576	42					

❒**3.** Folosind proprietățile înmulțirii calculați cât mai simplu:

a) $25 \cdot 897 \cdot 4$; b) $8 \cdot 9037 \cdot 125$;
c) $23 \cdot 81 + 77 \cdot 81$; d) $672 \cdot 47 + 672 \cdot 53$;
e) $829 \cdot 153 - 829 \cdot 53$; f) $93 \cdot 67 + 93 \cdot 89 - 93 \cdot 56$;
g) $1998 + 1998 \cdot 1999 - 2000 \cdot 1997$; h) $37 \cdot 41 + 41 \cdot 13 - 41 \cdot 50$.

❒**4.** Calculați numărul de 45 de ori mai mare decât:

a) 12; b) 29; c) 137; d) 2354; e) 13739.

❒**5.** Stabiliți valorarea de adevăr a următoarelor afirmații:

a) $27 \cdot 43 = 1161$; b) $457 \cdot 32 = 14624$;
c) $537 \cdot 129 > 69273$; d) $1237 \cdot 345 = 426765$;
e) $1023 \cdot 24 > 24551$; f) $2150 \cdot 29 < 62351$;
g) $1834 \cdot 112 \geq 205408$; h) $3124 \cdot 201 \leq 62480$.

❒**6.** Calculați produsul $x \cdot x$, unde $x \in \mathbf{N}$, $5 \leq x < 10$.

❒**7.** Știind că $x \cdot y = 236$ și $z = 123$, calculați:

$(x \cdot y) \cdot z$; $x \cdot (y \cdot z)$; $z \cdot (x \cdot y)$; $y \cdot (z \cdot x)$.

❒**8.** Produsul a două numere naturale este 12. Aflați numerele. Câte soluții are problema ?

❒**9.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare din următoarele propoziții:

p: „Dacă înmulțim un factor al unui produs cu un număr natural nenul, atunci produsul se mărește cu acel număr".

q: „Dacă înmulțim un factor al unui produs cu un număr natural nenul, atunci produsul se mărește de acel număr de ori".

❒**10.** Completați tabelul:

a	b	c	a·b·c	a·(b+c)	c·(a–b)	b·(a–c)	a·b–a·c
3	2	1					
11	9	7					
13	11	7					
17	8	3					
20	15	5					

❒**11.** Calculați:

a) $18 \cdot 37 - 15 \cdot 27$;
b) $207 + 101 \cdot 32$;
c) $231 + 169 - 16 \cdot 25$;
d) $15 + 23 + 10 \cdot [107 + 43 - (106 - 16 \cdot 6) \cdot 10]$.

❒**12.** Se știe că: $x + y = 23$ și $z = 15$, calculați $xz + yz$.

❒**13.** Se știe că: $x - y = 12$ și $z = 10$, calculați $xz - yz$.

❒**14.** Se știe că: $ab + ac = 420$ și $b + c = 14$, aflați a.

❒**15.** Se știe că: $ab - ac = 135$ și $a = 9$, aflați $b - c$.

❒**16.** Se știe că: $ab + ac + a = 165$ și $b + c = 10$, aflați a.

❒17. Se ştie că a + 2b + c = 51 şi 2a + b + 2c = 42, aflaţi a + b + c.

❒18. Dacă a, b, c sunt numere naturale şi a + b + c = 18, iar 2a + b + 2c = 25, calculaţi (a + c)(3a + 2b + 3c).

❒19. Rezolvaţi ecuaţia: x + 2x + 3x + ... + 100x = 50500.

❒20. Aflaţi numerele naturale a şi b care verifică egalitatea ab + a = 15.

❒21. Dacă x + y = 8 şi y + 2z = 35, să se calculeze:
a) 5x + 13y + 16z; b) 3y – 2x + 10z;
c) 7x + 10y + 6z; d) 4(2z + y) + 3x + 3y.

❒22. Dacă a – 5b = 7, să se afle x din relaţiile:
a) x + 3a – 15b = 29; b) x – 123 + 5a – 25b = 137;
c) 14·7 + 67·7 + 7·119; d) x – 2a + 10b + 17 = 4;
d) 47 – x + 7a – 35b = 2a – 10b + 4.

❒23. Calculaţi cu câte zerouri se termină produsul:
1·2·3·4·5·6· ..... · 28.

❒24. Calculaţi în două moduri:
a) 50·(27 + 3); b) 14·49 + 71·14; c) 14·7 + 64·7 + 7·119;
d) 450·21 + 550·21 – 2100; e) 736·17 – 236·17 + 200·17.

❒25. Scrieţi numărul 36 ca un produs de:
a) două numere naturale; b) două numere naturale egale;
c) trei numere naturale astfel încât unul din ele să fie produsul celorlalte două.

❒26. Aflaţi a şi b ştiind că (a – 5)·(b – 7) = 0.

❒27. Aflaţi două numere ştiind că produsul lor este 56, iar suma lor este 15.

❒28. Într-un depozit erau 527 lăzi cu biscuiţi. Ştiind că în fiecare ladă sunt câte 5 rânduri şi pe fiecare rând sunt câte 4 pachete de biscuiţi, calculaţi câte pachete de biscuiţi sunt în depozit.

❒29. Dacă a – 2b = 7, calculaţi x din următoarele relaţii:
a) x + 3a – 6b = 30; b) x – 24 + 5a – 10b = 69;
c) 7a – x – 14b = 9; d) x + 20 + 2a = 4b + 74

❒30. Fie produsele:
a) 23·17·42; b) (14 + 36)·125; c) 237·(1236 – 1206); d) 127·22·155.
1) Calculaţi produsele.
2) Aproximaţi prin ados la zeci produsele.
3) Aproximaţi prin lipsă la sute produsele.
4) Rotunjiţi la mii produsele.

7. Ecuaţii, inecuaţii şi probleme care se rezolvă cu operaţiile studiate

❒1. Rezolvaţi ecuaţiile:
a) 2x + 5 = 17; b) 3x – 1 = 14;
c) 2(5x – 3) = 94; d) 3(2x + 7) – 5 = 22;
e) 5 [2(3x + 2) – 11] + 4 = 29.

❒2. Aflaţi numerele naturale x care sunt soluţii pentru fiecare din următoarele inecuaţii:
a) 3x – 2 < 7; b) 5x + 1 ≤ 26;
c) 2(3x – 7) < 10; d) 6[(2x + 1) · 3 – 5] + 8 ≤ 356.

❒3. Dacă la triplul unui număr adunăm 7 obţinem 22. Aflaţi numărul.

❒4. Dacă din dublul unui număr scădem 18 obţinem 2. Aflaţi numărul.

❒5. Mihai are de trei ori mai mulţi bani decât Sandu. Împreună au 6000 lei. Aflaţi ce sumă de bani are fiecare din ei.

❒6. Aflaţi suma a + b + c + d dacă c este de cinci ori mai mare decât d, b este cu 17 mai mic decât c, a = 2b + 2c şi d = 8.

❒7. Se ştie că 7a + 3b = 85 şi a = 2b. Să se afle numerele naturale a şi b.

❒8. Se ştie că 7a + 3b = 29 şi a + b = 7. Să se afle numerele naturale a şi b.

❒9. 3 creioane şi 5 caiete costă 57 500 lei. 4 creioane şi 2 caiete costă 30 000 lei. Cât costă un creion şi cât costă un caiet.

❒10. 4 caiete, 6 creioane, 2 gume costă 74 000 lei. 2 caiete, 1 creion şi 3 gume costă 35 000 lei. Cât costă împreună 1 caiet, 1 creion şi o gumă.

❒11. Verificaţi dacă următoarele egalităţi sunt adevărate:
a) 4 · 17 + 5 · 17 + 11 · 17 = 340; b) 23 · (14 + 29) = 989;
c) (47 – 12) · 19 = 665; d) 135 · 7 – 124 · 7 + 45 · 7 = 392.

❒12. Fie şirul de numere naturale format după regula 3n + 7, unde n este număr natural, n ≥ 1.
a) Scrieţi primii cinci termeni ai şirului şi calculaţi suma lor.
b) Verificaţi dacă 376 este termen al şirului.

❒13. a) Calculaţi 5x + 7y + 2z ştiind că x + y = 123 şi y + z = 257.
b) Determinaţi x ştiind că: ax + 3bx + 7x = 380 şi 2a + 6b + 14 = 152.

❒**14.** Să se determine suma a 7 numere naturale consecutive știind că al treilea număr este 19.

❒**15.** Calculați sumele:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 2000$; b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 4000$;

c) $10 + 20 + 30 + \ldots + 20\,000$; d) $100 + 200 + 300 + \ldots + 200\,000$.

❒**16.** Determinați cifrele distincte a, b, c știind că: $\overline{aa} + \overline{ba} + \overline{ca} = \overline{ab3}$.

❒**17.** Aflați x din:

a) $x + 225 = 537$; b) $x - 124 = 376$;

c) $937 - x = 124$; d) $432 + x = 532$;

e) $x + 2 < 12$; f) $7 - x > 2$;

g) $257 + x < 260$; h) $432 - x > 427$.

❒**18.** Să se afle un număr știind că dacă-l înmulțim cu 3, obținem același rezultat ca atunci când îl adunăm cu 256.

❒**19.** Într-o tabără erau de două ori mai mulți băieți decât fete. Dacă din tabără ar fi plecat 14 băieți și ar fi venit 28 de fete, atunci numărul băieților ar fi devenit egal cu numărul fetelor. Câte fete și câți băieți sunt în tabără?

❒**20.** Rezolvați ecuațiile:

a) $(x + 5) + (x - 4) = 11$;

b) $(x + 3) + (x - 1) + (x + 23) = 52$;

c) $[(x + 29 \cdot 2) \cdot 3 + 4] \cdot 11 = 1991$.

8. Împărțirea numerelor naturale

✎ ***Teorema împărțirii cu rest:*** *Oricare ar fi două numere naturale a și b, $b \neq 0$, există numerele naturale q și r, unic determinate, astfel încât*

$$a = b \cdot q + r \text{ și } r < b,$$

q este ***câtul****, iar r este* ***restul*** *împărțirii lui a la b.*

✎ *Dacă restul împărțirii lui a la b este 0, spunem că a* ***se împarte exact*** *la b și notăm:*

$$a : b = q.$$

a și b sunt ***factorii*** *câtului q; a se numește* ***deîmpărțit****, iar b se numește* ***împărțitor*** *și în acest caz $a = b \cdot q$ și $a : q = b$ sunt* ***echivalente*** *(dacă una este adevărată, atunci este adevărată și cealaltă).*

✎ *Operația prin care se obține câtul a două numere naturale se numește* ***împărțire****.*

Observații:

- **1)** *Împărțirea la 0 nu este definită sau, altfel spus, nu are sens.*
- **2)** *Oricare ar fi un număr natural b, $b \neq 0$, atunci:*

$$0 : b = 0.$$

- **3)** *Oricare ar fi numerele naturale a, b și c, $c \neq 0$, dacă a și b se împart exact la c, atunci:*

$$(a + b) : c = a : c + b : c,$$

iar dacă diferența $a - b$ are sens, atunci:

$$(a - b) : c = a : c - b : c.$$

- **4)** *Oricare ar fi numerele naturale a, b și c, $c \neq 0$, dacă a și b se împart exact la c și $a \leq b$, atunci:*

$$a : c \leq b : c.$$

- **5)** *Împărțirea nu este asociativă, nici comutativă și nu are element neutru.*
- **6)** *Ca și înmulțirea, împărțirea este operație de ordinul al doilea.*

Probleme rezolvate:

1. Fie a și b două numere naturale nenule și $x = 6a + 3b + 20$. Aflați restul împărțirii numărului x prin 3.

Soluție:

Din $x = 6a + 3b + 20 = 6a + 3b + 18 + 2 = 3 \cdot (2a + b + 6) + 2$, $2 < 3$.
Din teorema împărțirii cu rest avem că restul împărțirii lui x la 3 este 2.

2. Stabiliți dacă există numere naturale care împărțite la 5 dau restul 2 și împărțite la 10 dau restul 8.

Soluție:

Fie x numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest avem:

$x = 5a + 2$ și

$x = 10b + 8 = 10b + 5 + 3 = 5 \cdot (2b + 1) + 3$, $3 < 5$.

Deci restul împărțirii lui x la 5 ar fi, pe de o parte, 2 și, pe de altă parte, 3, ceea ce este absurd. Deci, nu există astfel de numere.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Calculaţi:

a) 816 : 12; b) 95378 : 103; c) 1955 : 17;
d) 30260 : 356; e) 190320 : 305; f) 32185 : 157;
g) 190320 : 624; h) 2431100 : 115; i) 133858 : 127;
j) 205128 : 407; k) 33884400 : 6040; l) 6989 : 241;
m) 7028 : 14; n) 37884 : 123; o) 3248 : 112.

2. Aflaţi câtul şi restul următoarelor împărţiri:

a) 2715 : 37; b) 602719 : 214; c) 4156 : 29;
d) 21700 : 370; e) 2170 : 37; f) 25531 : 121;
g) 40051 : 203; h) 2057 : 24; i) 4128 : 101.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

a) $64 : 4 = 128 : 8$; b) $(1600 : 8) : 4 = 3200 : (8 \cdot 4)$;
c) $[(900 : 3) : 3] : 5 = 600 : 4$; d) $8000 : [(80 : 4) : 5] = 144 : 12$;
e) $1440 : 5 : 4 : 3 = 1440 : (5 \cdot 4 \cdot 3)$; f) $512 : 16 : 4 = 512 : 4 : 16$.

4. Aflaţi ce se întâmplă cu câtul şi restul unei împărţiri în fiecare din următoarele situaţii:

a) dacă mărim deîmpărţitul cu o unitate;
b) dacă micşorăm deîmpărţitul cu o unitate;
c) dacă mărim deîmpărţitul de un anumit număr de ori;
d) dacă mărim şi deîmpărţitul şi împărţitorul de acelaşi număr de ori.

5. Aflaţi un număr natural care împărţit la 17 dă câtul 23 şi restul 11.

6. Aflaţi toate numerele naturale care împărţite la 5 dau câtul 12.

7. Aflaţi toate numerele naturale care împărţite la 7 dau câtul egal cu restul.

8. Aflaţi un număr natural care împărţit la un număr natural de două cifre dă câtul 72 şi restul 98.

9. Suma resturilor obţinute prin împărţirea la 6 a unui număr de numere naturale consecutive este 6. Calculaţi câte numere au fost.

10. a) Aflaţi cel mai mare număr natural de patru cifre care împărţit la 67 dă restul 23.

b) Aflaţi cel mai mic număr natural de patru cifre care împărţit la 67 dă restul 23.

c) Aflaţi câte numere naturale de patru cifre împărţite la 67 dau restul 23.

d) Aflaţi suma tuturor numerelor naturale de patru cifre care împărţite la 67 dau restul 23.

11. Fie a şi b două numere naturale nenule şi $x = 15a + 25b + 37$. Aflaţi restul împărţirii lui x prin 5.

12. Fie a şi b două numere naturale nenule cu $a > b$ şi $x = 84a - 28b + 57$. Aflaţi restul împărţirii lui x prin 14.

13. Fie a şi b două numere naturale nenule, $a < 15$ şi $x = 35a + 17b + 1$. Se ştie că x împărţit la 17 dă câtul 23 şi restul 5. Aflaţi numerele naturale a şi b.

14. Arătaţi că nu există numere naturale care împărţite la 12 dau restul 4 şi împărţite la 18 dau restul 8.

15. Determinaţi cel mai mare şi cel mai mic număr natural de patru cifre care împărţit la 57 să dea restul 7.

16. Să se determine deîmpărţitul, împărţitorul, câtul şi restul împărţirii unor numere naturale, ştiind că diferenţa între deîmpărţit şi rest este 6.

17. Pentru numerotarea paginilor unei cărţi s-au folosit 777 de cifre. Câte pagini are cartea ?

18. Calculaţi restul împărţirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 39$ prin 35.

19. Determinaţi suma tuturor numerelor naturale care dau câtul 130 la împărţirea la 7.

20. Dacă la un număr de două cifre se adună 4 şi suma se împarte la 7, se obţine acelaşi rezultat ca la împărţirea cu 6 a diferenţei dintre număr şi 9. Care este numărul?

21. Suma a două numere naturale este 86. Determinaţi numerele ştiind că restul împărţirii celui mare la cel mic este 2 şi câtul 3.

22. Completaţi spaţiile libere cu „=“, „<“ sau „>“ astfel încât să se obţină afirmaţii adevărate:

a) $(44200 : 130) : 2 \square 22100 : (13 \cdot 5)$;
b) $28980 : 9 : 5 \square 5796 : (2 \cdot 9)$;
c) $52275 : 17 : 25 \square (90846 : 63) : 14$;
d) $376371 : (31 \cdot 57) \square 2365 \cdot 23 : 5$.

9. Ordinea efectuării operațiilor

1. Efectuați:
a) $785 + 115 + 37 \cdot (15 + 23 \cdot 12)$;
b) $624 - 120 + 2025 : (266 - 17 \cdot 13)$;
c) $145 + 47 \cdot [215 \cdot 110 - 83 \cdot (405 - 18 \cdot 16)]$;
d) $512 - 287 + 10 \cdot \{15 + 2 \cdot 3 + [105 : 15 + (120 - 5 \cdot 19) \cdot 10] \cdot 2\}$;
e) $43648 : 64 - 15 \cdot [207 - (202 - 1080 : 90)]$;
f) $63450 : 45 + 108 \cdot 21 - (105 : 15 + 17) \cdot 25$;
g) $\{123 \cdot 35 + 10 \cdot [47 + 10 \cdot (407 + 2405 : 65)] - 2785\} \cdot 10$;
h) $210 - 13 \cdot 12 + 105 \cdot [27 \cdot 11 - (31 + 84 : 14) : 37]$.

2. Comparați numerele a și b unde:
$a = 1001 \cdot 27 + 1001 \cdot 23$ și $b = 2002 \cdot 13 + 2002 \cdot 12$.

3. Rezolvați ecuațiile:
a) $[15 \cdot (10x - 11) - 120] \cdot 10 - 125 = 25$;
b) $100 \cdot \{10 \cdot [(45x - 35) : 5 + 12] \cdot 2 - 21\} + 17 = 25917$.

4. Să se efectueze:
a) $1320 + [48 \cdot 23 + (340 \cdot 11 - 60 \cdot 5) - 235 \cdot 7]$;
b) $2307 + \{3702 + [270 : 3 + 3 \cdot (280 \cdot 5 - 3 \cdot 230)]\}$;
c) $31975 + 200 \cdot [8 \cdot (1270 - 2 \cdot 350) + 2340 : 5]$;
d) $420 : \{5600 : [202 - 146 : (84 - 132 : 12)]\}$;
e) $171 \cdot 151 - [180 \cdot 5 - (3 \cdot 37 + 27 \cdot 15) : 3] \cdot 12 + 158$.

5. Stabiliți care din următoarele relații sunt adevărate și care sunt false:
a) $[530 + 3 \cdot (95 - 5 \cdot 15) : 12] - 14 \cdot 25 = 29$;
b) $[(63 + 991 \cdot 7) : 100 + (37 \cdot 111 - 56 \cdot 37) \cdot 2] : 11 = 37$;
c) $\{[(40 \cdot 20 + 50 \cdot 16) : 200 + 72 : 8] : 17 - 1\} \cdot [2 + 7 \cdot 10 - (30 - 5 \cdot 6) : 2] = 0$.

6. Să se calculeze diferența dintre produsul și suma numerelor x și y, unde:
$x = 3z$, $y = t : 6$, $z = 5 \cdot (126 - 8 \cdot 7 : 14) - 210$,
$t = 60 \cdot 25 - [190 \cdot 5 - (4 \cdot 35 + 27 \cdot 14) : 7] \cdot 37 : 74$.

7. Determinați numerele naturale care verifică egalitățile:
a) $x + 5273 = 5723$;
b) $x - 23542 = 42200$;
c) $(x + 200) : 20 = 45$;
d) $(320 + x) \cdot 15 = 5100$;
e) $4x - 1000 : 50 - 620 : 4 = 5$.

8. Determinați numerele naturale care verifică inegalitățile:
a) $3(x - 2) \leq 3$;
b) $(x + 2) \cdot 3 - 45 \leq 15$;
c) $18x - 14 \geq 2 \cdot (3x + 5)$;
d) $243 : (x - 4) > 9$ și $x : 5 \geq 2$.

9. Determinați perechile de numere naturale (x, y) care satisfac egalitatea:
$(x \cdot y + 79 \cdot 5) : (304 - 296) \cdot 5 - 177 = 73$.

10. Calculați: $5a - 3(b + c) + 145 : 5 - 8$ dacă:
$3a - 2b = b - 2a + 3c$ și $c = [(3 + 6 + 9 + \ldots + 300) : 303] - 40$.

11. Calculați:
a) $2001 + 2001 \cdot 3$;
b) $2001 + 2001 \cdot 2001 + 2002$;
c) $2001 \cdot 25 + 75 \cdot (5001 - 3000)$.

12. Stabiliți dacă numărul $(3x + 2)(x + 3)$ este număr natural par oricare ar fi x număr natural.

13. Să efectueze:
a) $16 + 16 \cdot 2$;
b) $9 + 3 \cdot 457$;
c) $2 \cdot (1400 - 546)$;
d) $6 \cdot [3 + 3 \cdot (4 + 4 \cdot 225)]$;
e) $8 \cdot \{2 + 10[542 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot 542)]\}$.

14. Determinați numerele naturale a, b, c știind că:
a) $a + b = 100$, $b + c = 110$, $a + c = 90$;
b) $a + b = 84$, $b + c = 64$, $a + c = 34$.

15. Dacă $a = 18$ și $b + c = 57$, calculați valoarea expresiilor:
a) $a + b + c$;
b) $a + 5b + 5c$;
c) $3a + 2b + 2c$;
d) $a \cdot b + a \cdot c + 7b + 7c$.

16. Completați tabelul:

a	237	1257	4307	154	3249	2374	128
b	128	123	307	46	751	374	22
a + b							
a – b							
5a – b							
(a + b)(a – b)							

17. Calculați:
a) $32 : 16 + \{76 - 2 \cdot [(20 + 4 \cdot 5) : 5] - 2 \cdot 6\}$;
b) $[430 : 10 + 4 \cdot (1 + 24 : 12)] \cdot 100 + 4 \cdot (28 \cdot 11 - 23 \cdot 11) : 11$;
c) $(3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18) : (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$;
d) $3 + 10 \cdot \{3 + 10 \cdot [3 + 10 \cdot (3 + 10 \cdot 3) - 3] - 3\} - 3$.

18. Calculați, respectând ordinea efectuării operațiilor:
a) $93 : 3 + 41 \cdot 5 - 45 : 9 + 28 : 7 + 81 : 3 - 2 \cdot 6$;
b) $\{7 + 7 \cdot [7 + 3 \cdot (5 + 225 : 15 - 15)]\} - 161$;
c) $10 \cdot \{2 + 10 \cdot [126 + 10 \cdot (24 + 24 : 2 - 6)]\} - 42600$.

19. Calculați în două moduri:
a) $17 \cdot (105 + 95)$; b) $(24 + 16) \cdot 15$;
c) $32 \cdot (47 - 37)$; d) $(257 - 17) \cdot 10$;
e) $1024 \cdot 379 + 1024 \cdot 121 - 1024 \cdot 450$.

20. Calculați x din:
a) $[(x + 174 : 3) \cdot 3 + 4] \cdot 11 = 1991$;
b) $(x : 11 - 4) : 3 - 165 : 3 = 12 : 3$.

21. Calculați:
a) $(589 + 146) : 15 + (287 - 269) : 3$;
b) $(307 + 533) : 14 - 85 : 17 + 945 : 21$;
c) $500 - 200 : 10 + (650 + 310) : 12$;
d) $22 \cdot 50 - 10\,800 : 45 + (11\,000 - 8\,000) : 50$;
e) $705 : (95 - 80) - (120 : 3 - 75 : 15) : 7$;
f) $20\,449 : (257 - 88) - 1\,254 : 57$;
g) $[(5\,008 : 4 + 199 \cdot 2) : 25 + 17] \cdot 1095 - 1127 : 23$.

22. Determinați x din:
a) $2(x - 2) \leq 10$; b) $(x + 4) \cdot 6 - 24 \leq 12$;
c) $144 : (x - 5) > 9$ și $x : 7 > 2$; d) $3x \leq 27$ și $4x \geq 12$;
e) $2x + 4 + x \geq 17$ și $14x - 4 \leq x + 22$;
f) $14x + (4 - x) \cdot 3 < 23$ și $47 - x > 5x + 17$;
g) $[(x - 144 : 12) \cdot 3 - 2] : 7 \leq 4$;
h) $2 \leq x \leq 10$ și $3x - 4 \geq 23$.

23. Calculați, folosind metoda factorului comun:
a) $3 \cdot 7 + 3 \cdot 15 + 3 \cdot 13$; b) $33 \cdot 17 + 33 \cdot 15 + 33 \cdot 113$;
c) $201 \cdot 327 - 201 \cdot 307 + 201 \cdot 23$; d) $217 \cdot 407 - 217 \cdot 397 - 217$;
e) $2002 \cdot 2001 - 2001 \cdot 2000 - 2001$; f) $(75 \cdot 37 - 65 \cdot 37) \cdot 47 - 47$;
g) $1725 \cdot 707 + 324 \cdot 707 - 321 \cdot 707$; h) $(111 + 222 + 333 + 444) : 111$;
i) $12 \cdot 17 \cdot 77 + 24 \cdot 34 \cdot 77 - 12 \cdot 51 \cdot 77$; j) $25 \cdot 2002 + 15 \cdot 2002 - 2002$.

24. Știind că:
a) $b + c = 21$ și $a = 7$, calculați $a \cdot b + a \cdot c$;
b) $b - c = 31$ și $a \cdot b - a \cdot c = 837$, calculați a;
c) $a \cdot b - a \cdot c = 1440$ și $a = 45$, calculați $b - c$;

d) $a + b - c = 48$ și $d = 144 : (95 - 83)$, calculați $a \cdot d + b \cdot d - c \cdot d$;
e) $b - c = 7$, $a = 14$, $b = 21$, calculați $a \cdot (b - c) + a \cdot b$.

10. Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5

✎ *Un număr natural b este* ***divizor*** *al unui număr natural a dacă există un număr natural c, astfel încât* $a = b \cdot c$. *Se mai spune că a este* ***multiplu*** *al lui b.*

✎ *Notăm* $b \mid a$ *și citim „**b divide pe a**“ sau „b este divizor al lui a“. Uneori se folosește notația* $a : b$ *care se citește „**a este divizibil cu b**“ sau „a se divide cu b“ sau „a este multiplu al lui b“.*

✎ *Din teorema împărțirii cu rest rezultă că dacă* $b \neq 0$, *atunci b divide pe a dacă și numai dacă a se împarte exact la b.*

Proprietăți:

- *oricare ar fi numărul natural a, atunci* $a \mid a$ *(în particular* $0 \mid 0$*);*
- *oricare ar fi numărul natural a, atunci* $a \mid 0$ *și* $1 \mid a$*;*
- *oricare ar fi a și b două numere naturale* $a \mid a \cdot b$ *și* $b \mid a \cdot b$ *(adică produsul a două numere naturale este divizibil cu fiecare factor al produsului);*
- *oricare ar fi numerele naturale a și b, dacă* $a \mid b$ *și* $b \mid a$, *atunci* $a = b$.
- ***criteriul de divizibilitate cu 10****: un număr natural este divizibil cu 10 dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0;*
- ***criteriul de divizibilitate cu 5****: un număr natural este divizibil cu 5 dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5;*
- ***criteriul de divizibilitate cu 2:*** *un număr este divizibil cu 2 dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0, 2, 4, 6 sau 8.*

✎ *Un număr* ***prim*** *este un număr natural care are exact doi divizori. Numerele naturale care nu sunt prime se numesc* ***numere compuse****.* ***1*** *nu este* ***număr prim****, dar nu este nici* ***număr compus****.*

EXERCIŢII

1. Scrieţi toţi divizorii numerelor: 12, 27, 31.

2. Scrieţi 5 divizori ai numărului 100.

3. Câţi divizori are numărul 18? Dar 28?

4. Care este cel mai mic număr natural care are exact doi divizori?

5. Aflaţi toţi divizorii comuni ai numerelor 12 şi 18 şi precizaţi care este cel mai mare dintre ei.

6. Care este cel mai mic număr natural care are exact 3 divizori?

7. Un număr natural nenul a are printre divizorii săi numerele 3, 5 şi 7. Scrieţi încă 4 divizori diferiţi de aceştia ai numărului a.

8. Un număr natural a este divizibil prin 12. Scrieţi 3 divizori diferiţi ai numărului a.

9. Dacă a | b şi b | c, atunci arătaţi că a | c.

10. Dacă a | b şi b | a, arătaţi că a = b.

11. Scrieţi 3 multipli ai numărului 6 mai mari decât 6.

12. a) Scrieţi toţi multiplii mai mici decât 50 ai numărului 7.
b) Scrieţi toţi multiplii lui 7 cuprinşi între 15 şi 65.

13. Aflaţi cel mai mare număr natural de 3 cifre care este multiplu de 23.

14. Aflaţi cel mai mic număr natural de 4 cifre care este multiplu de 47.

15. Scrieţi 3 multipli comuni pentru numerele 12 şi 18.

16. Care este cel mai mic număr natural nenul multiplu comun pentru numerele 6 şi 9?

17. Care este cel mai mic număr natural nenul multiplu comun pentru numerele 2, 3 şi 5?

18. Numerele naturale nenule a şi b au divizor comun numai pe 1. Care este cel mai mic număr nenul, multiplu comun pentru numerele a şi b.

19. Fie următoarele numere naturale: 6, 10, 15, 17, 20, 24, 86, 95, 112, 130.
a) Care din aceste numere sunt divizibile cu 10?
b) Care din aceste numere sunt divizibile cu 5?
c) Care din aceste numere sunt divizibile cu 2?

d) Care din aceste numere nu sunt divizibile cu nici unul din numerele 10, 5 şi 2?

20. a) Scrieţi numerele natuale de forma $\overline{12x}$ divizibile cu 2.
b) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{3xy}$ divizibile cu 5.
c) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 2 şi cu 5.

21. Folosind cifrele 0, 5 şi 4 scrieţi toate numerele de trei cifre divizibile cu:
a) 2; b) 5; c) 10.

22. Scrieţi cel mai mic şi cel mai mare număr de forma $\overline{7xx}$ divizibil cu 2.

23. Scrieţi numerele de forma $\overline{xx7y}$ divizibile cu:
a) 2; b) 5; c) 10.

24. Arătaţi că:
a) produsul a două numere naturale consecutive se divide cu 2;
b) produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 3.

25. a) Daţi trei exemple cu numere naturale care sunt divizibile cu 2, dar nu sunt divizibile cu 5.
b) Daţi trei exemple de numere naturale care sunt divizibile cu 5, dar nu sunt divizibile cu 2.

26. Dacă a şi b sunt numere naturale şi x = 3a + 6b, arătaţi că x este multiplu de 3.

27. Dacă a şi b sunt numere naturale şi x = 4a + 8b + 12, arătaţi că x ⋮ 4.

28. Arătaţi că produsul a cinci numere naturale consecutive este divizibil prin 10.

29. Arătaţi că oricum am alege 6 numere naturale, există două care au diferenţa divizibilă prin 5.

30. Dacă a, b, d sunt numere naturale nenule, a > b, d | a şi d | b, arătaţi că:
i) d | (a + b); ii) d | (a – b).

31. Dacă a, b, d sunt numere naturale nenule şi d | a, arătaţi că d | ba.

32. Folosind rezultatele din problemele 30 şi 31, arătaţi că dacă a, b, c, d, e sunt numere naturale nenule, cu b > c, d > e, a | b şi a | c, atunci a | (db + ec) şi a | (db – ec).

33. Dacă a, b, d sunt numere naturale nenule, d | (a + b) şi d | a, arătaţi că d | b.

❒**34.** Aflați numerele naturale a și b care verifică egalitatea a + b = a · b.

❒**35.** Suma a 8 numere naturale nenule distincte este 39. Arătați că produsul acestor numere este divizibil prin 5.

11. Numere pare și numere impare

✎ *Din teorema împărțirii cu rest rezultă că oricare ar fi n un număr natural, restul împărțirii lui n la 2 este 0 sau 1. Deci, orice număr natural este de forma 2r sau 2r + 1, unde r este un număr natural. Numerele de forma 2r se împart exact la 2 și se numesc* ***numere pare****, iar cele de forma 2r + 1 dau la împărțirea cu 2 restul 1 și se numesc* ***numere impare****.*

✎ *Șirul numerelor pare este 0, 2, 4, 6, ..., 10, 12, 14, ..., 100, 102, 104, ..., 1000, 1002, 1004, ...*

✎ *Șirul numerelor impare este 1,3, 5, 7, ..., 9, 11, 13, ..., 99, 101, 103, ..., 999, 1001, 1003, ...*

✎ *Pentru a obține un număr natural par este suficient să luăm un număr natural r oarecare și să calculăm 2r; dacă calculăm 2r + 1 obținem un număr natural impar.*

✎ *Dacă a și b sunt două numere naturale de aceeași paritate sau de parități diferite, paritatea sumei, diferenței și produsului rezultă din următorul tabel.*

a	*b*	*a + b*	*a – b*	*a · b*
par	*par*	*par*	*par*	*par*
par	*impar*	*impar*	*impar*	*par*
impar	*par*	*impar*	*impar*	*par*
impar	*impar*	*par*	*par*	*impar*

Observație:

● *Despre paritatea câtului a : b (dacă împărțirea se face exact) nu se poate spune nimic.*

EXERCIȚII

❒**1.** Fie numerele 16, 24, 29, 40, 53, 71, 121, 3004.
a) Scrieți care din aceste numere sunt pare.
b) Scrieți care din aceste numere sunt impare.

❒**2.** Scrieți șirul numerelor naturale pare și calculați al câtelea termen al șirului este:
a) 20; b) 1002; c) 24 736.

❒**3.** Scrieți șirul numerelor naturale impare și calculați al câtelea termen al șirului este:
a) 21; b) 441; c) 9 261.

❒**4.** Calculați suma numerelor pare și suma numerelor impare mai mari decât 2 437 și mai mici decât 3 712.

❒**5.** a) Aflați trei numere naturale pare consecutive, știind că suma lor este 978.

b) Aflați trei numere naturale impare consecutive, știind că suma lor este 1 719.

❒**6.** Scrieți numărul 15 ca suma a două numere naturale consecutive.

❒**7.** Scrieți numărul 26 ca suma a două numere naturale pare consecutive.

❒**8.** Scrieți numărul 36 ca suma a două numere impare consecutive.

❒**9.** Scrieți numărul 50 ca suma a cinci numere pare consecutive.

❒**10.** Scrieți numărul 96 ca suma a șase numere naturale impare consecutive.

❒**11.** Suma dintre un număr prim și un număr par este 76. Aflați numerele.

❒**12.** Suma dintre un umăr prim și un număr impar este 371. Aflați numerele.

❒**13.** Dacă a și b sunt două numere naturale, x = 2a + 6b și y = 4a + + 10b + 17, aflați ce paritate au următoarele numere:
a) x; b) y; c) x + y; d) x · y;
e) 7x; f) 6y; g) 3x + y + 7.

❒**14.** Suma a 10 numere naturale nenule pare distincte este 110. Aflați numerele.

❒**15.** Suma a 10 numere naturale nenule pare este 108. Arătați că două din numere sunt egale.

❒**16.** Suma a 10 numere naturale nenule pare distincte este 112. Arătați că cel mai mare dintre ele este un număr mai mare decât 20.

❒**17.** Suma a 10 numere naturale impare distincte este 100. Aflați numerele.

❒**18.** Suma a 10 numere naturale impare este 96. Arătați că două din ele sunt egale.

❒**19.** Suma a 10 numere naturale impare distincte este 102. Arătați că cel mai mare dintre ele este un număr mai mare decât 20.

❒**20.** Stabiliți dacă există 15 numere naturale pare care, adunate, să aibă suma 1999.

❒**21.** Stabiliți dacă există 12 numere naturale impare care, adunate, să aibă suma 2001.

❒**22.** Avem 5 numere naturale nenule. Se știe că suma primelor două numere este un număr impar și suma ultimelor trei numere este un număr par. Arătați că produsul celor cinci numere este divizibil prin 4.

❒**23.** Suma a 10 numere naturale nenule distincte este 98. Arătați că produsul celor 10 numere este un număr par.

❒**24.** Suma mai multor numere pare consecutive este 54. Aflați numerele. Câte soluții are problema?

❒**25.** Aflați ce paritate are numărul n(n+1), unde n este număr natural.

❒**26.** Aflați ce paritate are numărul n(n−1) + 17, unde n este număr natural.

❒**27.** Aflați ce paritate are numărul x(x + 3), unde x este număr natural.

❒**28.** Stabiliți dacă există două numere naturale consecutive care au produsul egal cu suma lor.

❒**29.** Stabiliți dacă există numere naturale a și b care verifică egalitatea:

$$a(3a + 1) = b(b + 1) + 1.$$

❒**30.** Aflați numerele naturale prime a, b, c, care verifică egalitatea:

$$a + 38b + 60c = 198.$$

❒**31.** Aflați numerele naturale a, b, c, știind că a este număr prim,

$$a + b + c = 61 \text{ și } b - c = 25.$$

❒**32.** Aflați numerele naturale prime a, b, c, care verifică egalitatea

$$a + 2b + 10c = 82.$$

12. Ridicarea la putere. *Reguli de calcul cu puteri

Puterea unui număr natural

✎ *Fie a un număr natural, $a \neq 0$.*

***Puterea zero** a numărului natural a este prin definiție 1; notăm $a^0 = 1$ și citim „a la puterea zero este egal cu unu".*

***Puterea întâi** a numărului natural a este prin definiție a; notăm $a^1 = a$ și citim „a la puterea întâi este egal cu a".*

*Dacă n este un număr natural, $n \geq 2$, atunci **puterea a n-a** a numărului natural a se notează cu a^n (citim „a la puterea n") și este prin definiție $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$, deci $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}$; a este **baza** puterii, iar n **exponentul** ei.*

Observație:

- *Nu se definește 0^0 sau, altfel spus, 0^0 nu are sens.*

Ridicarea la putere

✎ *Operația prin care se obține puterea unui număr natural se numește **ridicarea la putere**. Ridicarea la putere este o **operație de ordinul al treilea**.*

Reguli de calcul cu puteri

✎ *Oricare ar fi numerele naturale a, m și n, $a \neq 0$, atunci:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ și } (a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

iar dacă $m \geq n$, atunci: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

✎ *Oricare ar fi numerele naturale a, b și n, $a \neq 0$, $b \neq 0$, atunci:*

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$

iar dacă a se împarte exact la b, atunci: $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Observație:

- *Se recomandă memorarea unor puteri ale numerelor 2, 3, 4 și 5.*

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$
$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$
$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$

Problemă rezolvată

Arătați că $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} < 2^{101}$.

Soluție:

Fie $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$.

Se calculează: $2x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{100} + 2^{101}$.

Se efectuează $2x - x = 2^{101} - 1 \Rightarrow x = 2^{101} - 1$ și cum $2^{101} - 1 < 2^{101} \Rightarrow$ $\Rightarrow x < 2^{101}$, adică $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} < 2^{101}$.

Observație:

● *Analog se calculează sumele de forma: $1 + a + a^2 + \ldots + a^n$, unde a și n sunt numere naturale nenule.*

EXERCIȚII

❒**1.** Calculați:

a) 2^4, 3^3, 7^3; 8^2, 1^{2002}; 2002^0; 5^4; 2003^1; 11^3; 12^2; 10^3; 101^2; 17^2; 5^3; 2^7; 45^2; 67^2; 11^2;

b) $2^3 + 5^2$; $3^2 - 2^3$; $2^4 \cdot 5^2$; $4^3 : 2^2$; $3^2 \cdot 7 - 1$.

c) Scrieți ca putere a lui 2 numerele:
4, 64, 16, 1, 8, 4^2, 8^3, 64^5.

d) Scrieți ca putere a lui 3 numerele:
1, 81, 9, 27^5, 9^{16}, 81^{14}.

❒**2.** Scrieți sub formă de putere:

a) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^0 \cdot 2$;
b) $5^3 \cdot 5^5 \cdot 5 \cdot 5^{10}$;
c) $27 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 3^0$;
d) $4^2 \cdot 8^3 \cdot 2^5 \cdot 16$;
e) $47 \cdot 47^2 \cdot 47^5$;
f) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot 125 \cdot 625$
g) $1825 : 25 + 10 \cdot 2^3$;
h) $147 + 85 \cdot 3^2$;
i) $2^{10} : 1024 + 5^0$;
i) $108 : (2 \cdot 3^2) + (3^2 \cdot 5)^2 : 225$.

❒**3.** Calculați:

a) $2^5 + 6^3$;
b) $5^2 - 3^2$;
c) $2^3 + 2^4 + 2^1$;
d) $14^2 - 10^2 - 8^2$;
e) $2^5 - 2^{13} + 9^0$;
f) $7^3 - 14^2 - 7^1$;
g) $5^0 + 5^1 + 5^2$;
h) $4^3 - 3^3 + 5^0$;
i) $2^3 + 5^3 + 2 \cdot 3$;
j) $17^0 - 1^{2001}$;
k) $(12^2 + 5^2) : 13$;
l) $(5^2 - 4^2) : 3$.

❒**4.** Să se efectueze:

a) $(7 - 3)^3$;
b) $(2 + 3)^2$;
c) $12^2 - 5^2$;
d) $40^2 + 30^2$;
e) $50^2 - 30^2$;
f) $2^4 + 3^2 \cdot 2 \cdot 5^0$;

g) $5^2 - 3^2 + 4^2$;
h) $15^2 - 2^2 \cdot 3^2$;
i) $5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2$.

❒**5.** Calculați:

a) $2^{17} \cdot 2^{21}$;
b) $3^{45} \cdot 3^{87} \cdot 3^{55}$;
c) $7^{19} \cdot 7^{83} \cdot 7$;
d) $2^{47} : 2^{39}$;
e) $5^{108} : 5^{72}$;
f) $2^{37} \cdot 2^{47} : 2^{50}$;
g) $3^{27} : 3^{18} \cdot 3^{41}$;
h) $10^{51} : (10^{38} : 10^{20})$;
i) $(2^{17})^5$;
j) $(10^{12})^5$;
k) $(2^{17})^8 \cdot 2^{31}$;
l) $3^{108} : (3^{15})^6$;
m) $(3^7 \cdot 5^{12})^2$;
n) $(2^{10} \cdot 3^7)^9 : (2^5 \cdot 3^6)^{10}$;
p) $4^{20} : 2^{37}$;
r) $(2^{17} \cdot 3^9)^{10} : (2^{11} \cdot 9)^{14}$.

❒**6.** Efectuați:

a) $(5^{17} \cdot 5^{18} + 7^{23} : 7^{15}) : (7 \cdot 7^2 \cdot 7^5 + 5^{50} : 5^{15})$;

b) $\left[(2^{10})^8 + 6^5 \cdot 3^7 + 2^{3^2}\right] : \left[(2^5)^6 + 6^{12} : 2^7 + 2^9\right]$.

❒**7.** Pentru $a = 5$ și $b = 3$ verificați dacă fiecare din următoarele egalități sunt adevărate:

i) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$;
ii) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$;
iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

❒**8.** Fie egalitatea $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Verificați această egalitate pentru:

i) $a = b = c = 10$;
ii) $a = 2$; $b = 3$; $c = 4$.

❒**9.** Aflați numerele naturale x și y care verifică egalitatea:

$$2^x + 2^y = 24.$$

❒**10.** Aflați numerele naturale x, y și z care verifică egalitatea:

$$2^x + 2^y + 2^z = 28.$$

❒**11.** Aflați numerele naturale nenule x, y și z care verifică egalitatea:

$$2^x + 3^y + 5^z = 68.$$

❒**12.** Rezolvați ecuațiile:

a) $2^x = 8$;
b) $2^x \cdot 4 = 32$;
c) $8^x \cdot 16 = 128$.

❒**13.** Arătați că $2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{50}) < 3^{51}$.

14. Fie numerele:
$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} + 2^{101}$ şi
$b = 3(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{50})$.
Arătaţi că $a = b$.

15. Arătaţi că: $(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1) = a^n - 1$.

16. Scrieţi numărul $2^{10} - 1$ ca o sumă de 10 puteri consecutive ale lui 2.

17. Calculaţi:
a) $(4 + 3)^3 - (4 - 3)^{10}$;
b) $(10^3 - 125 \cdot 2^3) : 123^{123}$;
c) $[(2000 + 101)^5 - (2000 - 101)^5]^0$;
d) $[2^2 - (5^2 - 2^3 \cdot 3)^{10}]^4 : 81$;
e) $[(10^3 : 5^2 : 8 + 3^2 \cdot 5^2) : 3^0] \cdot 2^{2^0}$;
f) $\{[(12^2 + 5^2) : 13]^2 - 2^7 - 2^0\} : 2^3$.

18. Determinaţi numărul natural care verifică fiecare relaţie:
a) $(4^x)^2 = 2^8$;
b) $(10^x)^5 \cdot 100 = (2^4 \cdot 5^4)^8$;
c) $(5^2)^{x+3} = 5^{4x} \cdot 5^2$;
d) $x : (2^3)^0 = 1$;
e) $(3^x)^5 = 3^{10} \cdot 3^5$;
f) $(7^4)^x = (7^5)^2$;
g) $x : (2^2 \cdot 2^3) = 4$;
h) $x + (2^2)^5 = 2^3 \cdot 2^7$.

19. Descompuneţi în produs, folosind factorul comun:
a) $4^5 + 4^8 - 4^4$;
b) $3^3 + 6^5 + 3^4$;
c) $x^2 + x^3 + x^4$;
d) $5^3 \cdot 6 + 5^4 \cdot 7$;
e) $3x^2y + 2xy^2 + 4xy$;
f) $7^5 \cdot x + 7^4 \cdot y + 49z$;
g) $5^6 \cdot 4x + 5^4 \cdot 4y + 5^3 \cdot 7z$.

20. Determinaţi numărul natural care verifică relaţiile:
a) $3^x + 3^{x-1} = 4$;
b) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 40$;
c) $5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = 81$;
d) $3^{2x+1} - 3^{2x} - 3^{2x-1} - 3^{2x-2} - 3^{2x-3} = 123$.

21. Calculaţi:
a) $(16 \cdot 12^{10} - 4 \cdot 12^{10}) : 12^{11}$;
b) $15^2 - (14 \cdot 15 + 15) : 15^2$;
c) $10^3 \cdot 85 - 10^3 \cdot 61 - 3000$;
d) $5^{11} - (6 \cdot 5^{10} - 2 \cdot 5^{10})$.

22. Determinaţi numărul natural care verifică relaţiile:
a) $x^2 : 2^2 = 3^2$;
b) $25^2 - x = 24^2$;
c) $x : 10^3 = 10^0$;
d) $441 : x = 21^2$;
e) $x - 2^5 = 5^3$;
f) $324 : x = (3^2 \cdot 2)^2$.

13. Compararea şi ordonarea puterilor. Reguli de comparare

Puteri cu aceeaşi bază

Oricare ar fi a, m şi n numere naturale, $a \neq 0$ şi $a \neq 1$, dacă $m \leq n$, atunci $a^m \leq a^n$.

Puteri cu acelaşi exponent

Oricare ar fi a, b şi m numere naturale nenule, dacă $a \leq b$, atunci $a^m \leq b^m$.

Puteri cu baze diferite şi exponenţi diferiţi

Pentru a compara două puteri care au bazele diferite şi exponenţii diferiţi se aduc puterile (dacă este posibil) fie la aceeaşi bază, fie la acelaşi exponent şi apoi se compară după regulile enunţate mai sus.

EXERCIŢII

1. Comparaţi numerele:
a) 2^{17} şi 2^{31};
b) 5^{101} şi 5^{83};
c) 101^{23} şi 101^{75};
d) 5^{23} şi 7^{23};
e) 11^{47} şi 5^{47};
f) 2^{38} şi 3^{38};
g) 7^{21} şi 5^{17};
h) 3^{19} şi 2^{13};
i) 23^{41} şi 41^{59};
j) 1^{107} şi 1^{203};
k) 0^{43} şi 0^{83};
l) $\left(7^{23}\right)^0$ şi 7^{23^0};
m) $\left(7^0\right)^{23}$ şi $\left(5^{31}\right)^0$;
n) $\left(2^3\right)^2$ şi 2^{3^2};
p) $2^{37} \cdot 3^{59}$ şi $2^{41} \cdot 3^{61}$.

2. Comparaţi numerele:
a) 2^{53} şi 4^{29};
b) 9^{51} şi 3^{103};
c) 4^{47} şi 8^{31};
d) 9^{24} şi 27^{16};
e) 125^{43} şi 25^{61};
f) 10^{43} şi 100^{19}.

3. Comparaţi numerele:
a) 2^{30} şi 3^{20};
b) 5^{34} şi 3^{51};
c) 2^{155} şi 3^{93};
d) $2^{111} \cdot 5^{38}$ şi 3^{131};
e) 10^{74} şi 6^{123}.

4. Comparaţi numerele: 2^{302} şi 3^{203}.

5. Comparaţi numerele: $2^{87} + 2^{86} + 2^{85}$ şi $5^{35} + 5^{34}$.

6. Comparaţi numerele: $3^{2n+1} - 9^n$ şi $2^{3n+1} - 8^n$, unde n este un număr natural oarecare.

7. Comparaţi numerele:

a) $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{50}$ și 2^{2975};
b) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \ldots \cdot 5^{50}$ și 2^{2975}.

❒**8.** Ordonați crescător numerele: 3^{3^3}, $(3^3)^3$, 33^3, 3^{33}.

❒**9.** Aflați câte cifre are numărul 2^{30} scris ca număr natural.

Indicație: se arată că $10^9 < 2^{30} < 10^{10}$.

❒**10.** Care dintre numerele: $A = a^{1+2+\ldots+1980}$ și $B = (a^{990})^{1981}$ este mai mare?

❒**11.** Comparați numerele:
a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$ cu $2^7 - 1$;
b) 2^{58} cu $3^{39} - 9^{19}$.

❒**12.** Comparați numerele:
a) $x = 2^{96} + 2^{98} + 2^{100}$ și $y = 2^{101} + 2^{99} + 2^{97}$;
b) $x = 3^{57} - 3^{55} - 3^{53}$ și $y = 5^{43} - 125^{14}$.

❒**13.** Ordonați descrescător numerele:
a) 7^5; 2^{18}; 3^{12};
b) 3^{51}; 2^{102}; 6^{34};
c) 25^{16}; 2^{48}; 16^{20};
d) 3^{54}; $7^{27} - 2^2 \cdot (7^2)^{13}$; 9^{28}.

❒**14.** Ordonați crescător numerele:
a) $(3^9)^4$; $(3^{13})^3$ și 9^{16};
b) $(2^2)^{30}$; $2^6 \cdot 2^{11} \cdot 2^{14}$ și $\left(\left(2^2\right)^5\right)^3$.

❒**15.** Determinați numerele naturale x astfel încât:
a) $2^x < 3^4$;
b) $2^x = 3^x$;
c) $2^{2x} < 8^4$;
d) $3^{2x} > 27^x$;
e) $8^x = 4^3$;
f) $9^2 > 3^x$;
g) $5^x = 1$;
h) $3^{x+2} = 3^3$;
i) $[(5^2)^3]^x = 5^{12}$.

❒**16.** Ordonați crescător numerele: 2^2, 2^5, 4^2, 2^7, 8.

❒**17.** Completați spațiile cu simbolul adecvat:
a) $3^7 \square 3^5$;
b) $2^3 \square 2^3 + 3^0$;
c) $(3 \cdot 5)^2 \square 3^2 \cdot 5^2$;
d) $(5^2)^3 \square 5^{12} : 5^6$;
e) $(7^5)^2 \square (7^4)^2 \cdot 7^2$.

❒**18.** Ordonați descrescător numerele:
a) 3^{40}; 2^{60}; 25^{10}; 7^{20};
b) 3^{2x}; 2^{3x}; 5^x, $x \neq 0$.

❒**19.** Fie $a = 4^{103}$ și $b = (5^{200} - 4 \cdot 5^{199} + 9^{54} : 3^{107} - 5^{199})^{206}$. Verificați care din următoarele afirmații este adevărată:
a) $a < b$;
b) $a = b$;
c) $a > b$.

❒**20.** Comparați numerele:
a) 2^{2^3} cu $(2^2)^3$;
b) 3^{2^3} cu $(3^2)^3$;
c) 3^{38} cu $2^{59} - 2^{58} - 2^{57}$;
d) 9^{40} cu 81^{20}.

14. Pătratul și cubul unui număr natural. *Pătrate perfecte

✎ *Puterea a doua a unui număr natural n, adică n^2, se mai numește* ***pătratul numărului n****. Astfel, n^2 se citește „n la pătrat".*

✎ *Puterea a treia a numărului natural n, adică n^3, se mai numește* ***cubul numărului n****. Astfel, n^3 se citește „n la cub".*

✎ *Un* ***pătrat perfect*** *este pătratul unui număr natural.*

Șirul de numere 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... este șirul 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, ..., n^2 și se numește ***șirul numerelor naturale pătrate perfecte.***

✎ *Fie x un număr natural. Notăm cu U(x) ultima cifră a numărului x. Să analizăm datele din următorul tabel:*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$U(x^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Se observă astfel că ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. De aici rezultă și o metodă prin care putem dovedi că un număr nu este pătrat perfect. Dacă ultima cifră a numărului este diferită de 0, 1, 4, 5, 6 și 9, atunci numărul nu este pătrat perfect.

Pentru a afla ultima cifră a unui număr vom ține cont de:

$$U(x + y) = U(U(x) + U(y)),$$
$$U(x \cdot y) = U(U(x) \cdot U(y)) \text{ și}$$
$$U(x^n) = U[(U(x))^n].$$

EXEMPLE:

$U(78 + 95) = U(8 + 5) = U(13) = 3$
$U(97 \cdot 83) = U(7 \cdot 3) = U(21) = 1$
$U(36^{59}) = U(6^{59}) = 6$

$0^1 = 0$
$0^2 = 0$

$1^1 = 1$
$1^2 = 1$

$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$

$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$
$3^5 = 243$

$4^1 = 4$
$4^2 = 16$
$4^3 = 64$

$5^1 = 5$
$5^2 = 25$

$6^1 = 6$
$6^2 = 36$

$7^1 = 7$
$7^2 = 49$
$7^3 = 343$
$7^4 = 2401$
$7^5 = 16807$

$8^1 = 8$
$8^2 = 64$
$8^3 = 512$
$8^4 = 4096$
$8^5 = 32768$

$9^1 = 9$
$9^2 = 81$
$9^3 = 729$

Privind aceste tabele cu rezultate observăm că ultima cifră pentru puterile lui 0, 1, 5 şi 6 este 0, 1, 5 respectiv 6 indiferent de exponentul puterii, ultima cifră pentru puterile lui 4 şi 9 este 4 respectiv 9 dacă exponentul este impar şi 6 respectiv 1 dacă exponentul este par.

Ultima cifră pentru puterile lui 2, 3, 7 şi 8 este după resturile ce se obţin prin împărţirea exponentului acestei puteri prin 4.

Dacă restul este 1 ultima cifră este 2, 3, 7 respectiv 8, dacă restul este 2 ultima cifră este 4, 9, 9, 4, dacă restul este 3 ultima cifră este 8, 7, 3 respectiv 2 şi dacă restul este 0 ultima cifră este 6, 1, 1 respectiv 6.

Probleme rezolvate:

1) Arătaţi că numărul 1998^{1999} nu este pătrat perfect.

Soluţie:

$U(1998^{1999}) = U(8^{1999}) = U(8^3) = 2 \Rightarrow 1998^{1999}$ nu este pătrat perfect.
$1999 : 4 = 499$ (rest 3).

2) Arătaţi că numărul $67^{38} + 92^{43}$ nu este pătrat perfect.

Soluţie:

$U(67^{38}) = U(7^{38}) = U(7^2) = 9$
$U(92^{43}) = U(2^{43}) = U(2^3) = 8$
$U(67^{38} + 92^{43}) = U(9 + 8) = U(17) = 7 \Rightarrow 67^{38} + 92^{43}$ nu este pătrat perfect.

3) Arătaţi că numărul $2^{20} + 2^{10}$ nu este pătrat perfect.

Soluţie:

$2^{20} + 2^{10} = 2^{10}(2^{10} + 1)$ şi $(2^{10})^2 < 2^{10}(2^{10} + 1) < (2^{10} + 1)^2$ deci $2^{10}(2^{10} + 1)$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive deci nu este pătrat perfect.

4) Arătaţi că numărul $4^{17} \cdot 9^{23}$ este pătrat perfect.

Soluţie:

$4^{17} \cdot 9^{23} = (2^2)^{17} \cdot (3^2)^{23} = 2^{2 \cdot 17} \cdot 3^{2 \cdot 23} = (2^{17})^2 \cdot (3^{23})^2 = (2^{17} \cdot 3^{23})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4^{17} \cdot 9^{23}$ este pătrat perfect.

EXERCIŢII

❒**1.** Verificaţi care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte: 8, 3^5, 4^3, 4^0, 81, 3^{12}, 9^{2003}, 5^{2p}, 27^{2p+3}, 10^{6p}, $p \in \mathbf{N}$.

❒**2.** Verificaţi care dintre următoarele numere sunt cuburi perfecte: 2^8, 27, 64, 5^{48}, 7^{225}, 11^{2001}, 17^{2003}.

❒**3.** Calculaţi:
a) pătratul numerelor mai mici decât 20;
b) cubul numerelor mai mici decât 10.

❒**4.** Arătaţi că numărul $2003^2 - 2003 - 2002$ este pătrat perfect.

❒**5.** Arătaţi că numărul $2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ este pătrat perfect.

❒**6.** Scrieţi numerele 10^2 şi 13^2 ca sumă de două pătrate perfecte.

❒**7.** Scrieţi numărul 36 ca sumă de 3 cuburi perfecte.

❒**8.** a) Calculaţi ultima cifră a numărului a^2, unde a este un număr natural oarecare.
b) Calculaţi ultima cifră a numărului $2a^2$, $3a^2$, $6a^2$.

❒**9.** Arătaţi că:
a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$;
b) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 19$;
c) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99$ sunt pătrate perfecte.

❒**10.** Calculaţi ultima cifră a numerelor:
2^{2002}; 3^{2003}; 4^{2001}; 5^{2004}.

❒**11.** Scrieţi cel mai mic număr natural nenul diferit de 1 care este în acelaşi timp cub perfect şi pătrat perfect.

12. Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:
a) 2^{1981}; b) 3^{483}; c) 97^{143}; d) 1998^{781}; e) $3^{83} + 8^{68}$.

13. Arătați că numărul: $3^{1981} + 4^{1981} + 5^{1981} + 6^{1981}$ nu este pătrat perfect.

14. Arătați că numărul: $3^{82} + 3^{83} + 3^{84}$ nu este pătrat perfect.

15. Arătați că numărul: $5^{34} + 5^{17}$ nu este pătrat perfect.

16. Arătați că numărul $25^{47} \cdot 49^{17}$ este pătrat perfect.

17. Arătați că numărul $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$ nu este pătrat perfect.

18. Arătați că numărul $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$ este pătrat perfect.

19. Arătați că numărul $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ nu este pătrat perfect.

20. Arătați că numărul $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ este pătrat perfect.

21. Arătați că numărul $2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^n$ nu este pătrat perfect, unde n este număr natural.

22. Arătați că dacă n este un număr natural care nu se împarte exact prin 5 atunci numărul $n^4 + 2$ nu este pătrat perfect.

23. Dacă x este un număr natural, atunci numărul $15x + 7$ nu este pătrat perfect.

24. Dacă x este un număr natural nenul, atunci numărul $15x - 7$ nu este pătrat perfect.

25. Arătați că numărul $12p + 16q + 6$ nu este pătrat perfect.

26. Determinați pătratele perfecte de forma:
a) $\overline{xyy}$; b) $\overline{xxy}$; c) $\overline{xyx}$.

27. Determinați numărul $\overline{xyz}$ astfel încât $\overline{xyz}$, $\overline{xzy}$ și $\overline{zyx}$ sunt pătrate perfecte.

28. Demonstrați că dacă numărul $\overline{xx5}$ este pătrat perfect, atunci numerele $2x + 5$, $x^2 + 5$ și $5x - 1$ sunt pătrate perfecte.

29. Demonstrați că numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1999 + 2$ nu este pătrat perfect.

30. Determinați cea mai mică valoare a lui n, număr natural pentru care numerele sunt pătrate perfecte:
a) $2^n + 17 \cdot 10^2$; b) $5^n + 3 \cdot 10^4$.

31. Determinați numărul natural $n \neq 0$ pentru care numerele $4 \cdot n$ și $6 \cdot n + 1$ sunt pătrate perfecte consecutive.

32. Câte pătrate perfecte sunt cuprinse între:
a) 200 și 800; b) 2000 și 8000. Justificați.

33. Arătați că numărul: $n = 100 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 99)$ este pătrat perfect.

34. Arătați că oricare ar fi numărul natural x, $5x + 2$ nu poate fi pătrat perfect.

35. a) Determinați a și b, $a < b$, astfel încât suma dintre $\overline{ab}$ și răsturnatul său să fie pătrat perfect.
b) Determinați a și b astfel încât $\overline{aa} + \overline{bb}$ să fie pătrat perfect.

36. a) Determinați a și b astfel încât $\overline{ab} = b^2$.
b) Determinați a și b, $a \geq b$, știind că $\overline{aa} + \overline{bb}$ este pătrat perfect.

37. Arătați că numărul 444 444 nu este pătrat perfect.

38. Arătați că numărul $2^n \cdot 5^{n+2}$ este pătrat perfect oricare ar fi numărul natural par n.

15. Ordinea efectuării operațiilor

1. Să se calculeze:
a) $2^3 \cdot 2^5 : 2^6$; b) $(2^3)^4 : 2^{10}$; c) $(2^9)^3 : (2^3)^8$;
d) $2^{3^2} : (2^2)^3$; e) $3^{2^5} : 3^{5^2}$; f) $(4 + 2^{192} : 2^{188}) : 5$;
g) $(1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^4) : (2^7 + 1)$; h) $\left[\left(3^3\right)^{12} : 3^{2^5} - 56\right] : 5$; j) $8^{16} : (2 \cdot 2^4 \cdot 2^{10})^3 - 2^1 - 2^0$.

2. Efectuați:
a) $[7 \cdot (14 - 2 \cdot 7) : 2]^2$; b) $(10^2 - 8^2) : 6 : 2 + 1^{2003}$;
c) $[17 \cdot (25 - 8 \cdot 3) \cdot 1^{2001} - 15] \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 3$;
d) $[(9^2 - 2^4 \cdot 5) : 1 + 5^9 : (5^2)^4] \cdot 2^2$;
e) $\{[(169 : 13 - 2^3) : 5 + (7 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3) : 5 + 3^2] : 19 + 5\} \cdot 2^3 - 2^4 \cdot 3$;
f) $(3^{32} : 3^2 + 2^3 \cdot 2^{25} - 2003^0) : (27^{10} + 8^9 - 324 : 18^2)$.

3. Calculați:
a) $4^{37} : (2 \cdot 2^{71}) + (3 + 3 \cdot 105) : 106$;
b) $3^3 + 3^{10} : 3^8 \cdot 3 + 3 \cdot 3^7 : 3^5 + 2 \cdot 3^{10} : (5 \cdot 3^5 + 3^5) + 9 \cdot 3^3$;
c) $[3^2 \cdot 3^3 + 2^{54} : 2^{52} + (3^5)^4 : 3^{20}] : 41$;
d) $[3^{48} : 3^{18} + (2^4)^5 + 6^{23} : 6^{13}] : \left[\left(3^5\right)^2 \cdot \left(2^2\right)^5 + 3^{17} \cdot 3^{13} + \left(2^5\right)^4\right]$;
e) $10 \cdot \{24^2 : 576 + 3 \cdot [(3^2 \cdot 2)^{15} : (3^{29} \cdot 2^{15}) + 1^{21}]\} : 13$;

f) $2^{100} : [2^{50} \cdot 2^{48} + (2^{10} \cdot 2^{15})^5 : 2^{27} + (5^{76} : 5^{75} - 3)^{90} \cdot 2^8 + 2^{98}]$;
g) $[3^7 \cdot 3^{10} + 2^{203} : 2^{108} - 5 \cdot (5^2)^5] : (3^{17} + 2^{95} - 5^{11})$.

❒4. Efectuați:

a) $5^{103} : \left(5^{17} \cdot 5^8\right)^4 + \left(324 : 9^2 + 5 \cdot 2^3\right) \cdot 10^0$.

b) $10^3 : 5^2 + 10 \cdot \left\{2^{10} : 64 + 2^3 \cdot \left[1035 : \left(5 \cdot 3^2\right) - \left(2^{37} \cdot 7^{37}\right)^2 : \left(4^{36} \cdot 49^{37}\right) : 2\right]\right\}$.

c) $2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 : 18 + 5 \cdot \left\{625 : 5^3 + \left[\left(3 \cdot 3^2 \cdot 5^2\right)^{17} : \left(9^{25} \cdot 25^{17}\right) + 6^5 : 3^5\right] \cdot 2^{3^0}\right\}$.

d) $\left(2^{3n+2} : 8^n\right)^2 + \left(3^{2n+1} \cdot 8^n\right) : \left(9^n \cdot 2^{3n}\right)$, unde n este număr natural.

e) $\left[6^{100} \cdot 2^{50} + \left(3^{17}\right)^{10} + 25^{37}\right] : \left[2^{150} \cdot 3^{100} + \left(3^{10}\right)^7 + 5^{74}\right]$.

f) $\left(2^{n+3} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 6^n\right) : 6^n$, unde n este număr natural.

g) $\left(2^{2n+1} \cdot 3^n + 4^n \cdot 3^{n+2}\right) : 12^n$, unde n este număr natural.

h) $\left(2^{3n+1} \cdot 9^n + 8^n \cdot 3^{2n+1} + 6^{2n} \cdot 2^{n+3}\right) : 13$.

❒5. Aflați câtul și restul împărțirii numărului $2^{n+1} \cdot 9^n + 6^n \cdot 3^{n+1} + 37$ la 5, unde n este un număr natural.

❒6. Aflați numărul natural n care verifică egalitățile:
a) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{55} - 2$;
b) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 56$.

❒7. Calculați:
a) $555^3 - 125 \cdot 111^3$;
b) $(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) : (2^{100} - 1)$.

❒8. Arătați că numărul $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{123}$ se divide cu 13.

❒9. Determinați cifrele numărului $A = 2 \cdot 10^{n+2} + 10^n + 3 \cdot 10^{n-3} - 1$ și specificați câte cifre sunt din fiecare.

❒10. Fie $a \in \mathbf{N}$. Determinați ultima cifră a numărului a^2 și a numărului $3a^2 + a$.

❒11. Se dă numărul $A = 10^{n+3} + 2 \cdot 10^n - 1$ scris în baza zece, unde n este un număr natural mai mare decât 1. Determinați numărul.

❒12. Efectuați:
a) $10^2 \cdot [4 + 5 \cdot 3^2 - 2^5 + 4^3 \cdot (49 - 3^2) : 2^3]$;
b) $[(2^6)^4 : 2^3 \cdot (2^6 + 2^6) - 4^6 : 2^{10}] : (2^{28} - 2^2) + 9$.

❒13. Calculați ultima cifră a numerelor:
a) 2^{47}; 2^{129}; 2^{2000};
b) 21^{324}; 19^{257}; 17^{2000};
c) $5^{1999} + 7^{2000}$;
d) $3^{1992} + 4^{1994} + 5^{1996} + 6^{1998} + 7^{2000}$.

❒14. Câte zerouri are la sfârșit numărul:
a) $A = (4^2 \cdot 3^5 \cdot 16^3 \cdot 25^5) \cdot (3^4 \cdot 5^{10} \cdot 2^{15})$;
b) $A = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 99^2 \cdot 100^2$.

❒15. Fie numărul: $A = (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2000}) + (7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2000}) + (9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{2000})$. Verificați dacă acest număr este pătrat perfect.

❒16. Fie numerele:
$a = (1 + 2 + 3 + \ldots + 2000) : 2000 \cdot 4$ și $b = (3^{17} : 9^8)^{2000} : 3^{2000}$.
Calculați $2a - 2^3 \cdot 5^3 \cdot 8b$.

❒17. Calculați $x^y + y^x$ pentru:
$x = 8^{33} : [4^{32} \cdot 2^{34} + (2^5 \cdot 2^{20})^5 : (16 \cdot 2^{23}) + (7^5 : 7^5 - 1)^{32} \cdot 4]$;
$y = [(11 - 0^{11}) \cdot (3^3 - 3^2) + 1^{2000}] \cdot (3^2 - 2^3) - 3^2 \cdot 2$.

❒18. Determinați ultima cifră a numărului:
a) $x = 2005^{1999} + 2006^{1999} + 2007^{1999} + 2008^{1999}$;
b) $x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1999} + 2^{2000}$;
c) $x = 1997^{1997} + 1998^{1998} + 1999^{1999} + 2000^{2000}$.

❒19. Fie numerele $x = 2^{10} \cdot 25^2 \cdot 7^{10}$ și $y = 2^5 \cdot 5^7 \cdot 3^{10}$.
a) Cu câte zerouri se termină fiecare din ele?
b) Cu câte zerouri se termină numărul $x \cdot y$?
c) Care este ultima cifră nenulă a numărului $x \cdot y$?

❒20. Calculați $(x - y)^{2000}$ pentru:

$x = (3^3 \cdot 20 + 49 \cdot 2^2 - 7) : \left(3^2\right)^{3^{4^0}} + \left(1^{2^{3^4}} + 4^{3^{0^5}}\right)$ și $y = 2^5 \cdot 7^5 - 14^5 + 5$.

❒21. Efectuați:
a) $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{43} - 2^{46} + [3^{148} : 3^{43} - (3^5)^{21}] + 16\}$;
b) $122 + 12 \cdot \{183 : [(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^4 : (2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}) + (2^8)^9 : 2^{72} - 1^{27} \cdot 5^0] - 9 \cdot (54 - 2^4 \cdot 3)\}$.

❒22. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:
a) $2 \cdot 3^2 + 5^2 : 5^0 + 4^2 \cdot 3 - (6^4)^6 : 2^{22} : (3^4)^6 + 5655 : 435 = 100$;
b) $(2^6)^5 \cdot \{3^4 \cdot 28 - [3 - (2^3 \cdot 5^3 - 3^2 \cdot 10^2 - 5^2) : (1 + 4)^2] : 10^4 - 2^{2^0} \cdot 3^4\} < 2^7 \cdot 4^5 \cdot 3^{25}$.

16. *Istoria evoluției sistemelor de scriere a numerelor. *Baze de numerație

✎ *Numerele se scriu cu ajutorul unor* ***simboluri*** *(semne grafice). Acestea au fost diferite în Antichitate de la un popor la altul.*

EXEMPLU:

Pentru numărul 10 egiptenii au folosit simbolul „∩", babilonienii au folosit simbolul „<", iar romanii simbolul"X".

✎ *După felul de ordonare și grupare a simbolurilor folosite se poate vorbi de două* ***moduri de scriere a numerelor:***

- *scrierea* ***nepozițională*** *(de exemplu, scrierea cu simboluri romane);*
- *scrierea* ***pozițională*** *(de exemplu, scrierea cu simbolurile arabe).*

✎ *Numărarea elementelor unei mulțimi se poate face și ea în mai multe moduri; aceasta a dat naștere la diferite* ***sisteme de numerație*** *(numărare).*

✎ *Numărul de simboluri necesar pentru scrierea pozițională a cardinalului mulțimilor finite se numește* ***baza*** *sistemului de numerație.*

Numerația în baza 10

Numărarea elementelor unei mulțimi finite se face prin gruparea și regruparea elementelor în grupe de câte 10.

Scrierea cardinalului elementelor mulțimilor finite necesită folosirea a zece simboluri diferite, deci ***baza*** *sistemului de numerație este* ***10****. Aceste simboluri sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și sunt numite* ***cifre arabe****.*

EXEMPLU:

Dacă o mulțime are cardinalul 529, înțelegem că elementele mulțimii se pot grupa astfel:

- 5 grupe de câte 10 grupe, fiecare din cele 10 având câte 10 elemente;
- 2 grupe de câte 10 elemente;
- 9 elemente.

Descompunerea în baza 10 a lui 529 este:

$$529 = \mathbf{5} \cdot 10^2 + \mathbf{2} \cdot 10 + \mathbf{9}.$$

În acest sistem de numerație, 10 elemente (**unități**) formează o grupă numită **zece**; 10 grupe de 10 formează o nouă grupă numită **sută**; 10 grupe de o sută formează o nouă grupă numită **mie** etc.

Observație:

● *Numerația în baza 10 se pare că a fost inventată de indieni și preluată de europeni datorită arabilor. Originea numerației în baza 10 este foarte probabil să fie cele 10 degete de la cele două mâini ale omului.*

Numerația în alte baze

Să presupunem că pentru numărarea elementelor unei mulțimi finite dispunem numai de simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, care au semnificația cunoscută.

Vom folosi procedeul grupării și regrupării elementelor mulțimii în grupe de câte cinci elemente (deoarece dispunem de cinci simboluri).

EXEMPLU:

Dacă prin acest procedeu de numărare cardinalul unei mulțimi, scris cu cele patru simboluri, este 321, înțelegem că mulțimea are:

- 3 grupe de câte 5 grupe, fiecare din cele 5 grupe având câte 5 elemente;
- 2 grupe de câte 5 elemente;
- 1 element.

Revenind la numerația în baza 10 (cu care suntem familiarizați), cardinalul mulțimii este:

$$\mathbf{3} \cdot 5^2 + \mathbf{2} \cdot 5 + \mathbf{1} = 86 \text{ (elemente).}$$

Scriem: $321_{(5)} = 86$ și citim „trei sute două zeci și unu în baza cinci este optzeci și șase în baza zece".

Transformarea bazelor

1. *Transformarea unui număr, dat într-o bază oarecare x, în baza 10:*

$\overline{ab}_{(x)} = a \cdot x + b, \ a \neq 0;$ $\qquad$ $\overline{abc}_{(x)} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \ a \neq 0;$

$\overline{abcd}_{(x)} = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d, \ a \neq 0$ *etc.*

2. *Transformarea unui număr, dat în baza 10, într-un număr scris într-o altă bază de numerație x. Se folosește procedeul împărțirilor succesive.*

EXEMPLU: Să se scrie 339 în baza 5.

339	5		
30	67	5	
39	5	13	5
35	17	10	②
④	15	③	
	②		

Deci, $339 = 2324_{(5)}$

Observaţie:

● *O importanţă deosebită în tehnică o are şi* ***sistemul de numeraţie în baza 2*** *(sistemul binar sau dual). El foloseşte doar două simboluri: 0 şi 1.*

EXERCIŢII

❒**1.** Scrieţi următoarele numere ca numere naturale în sistemul zecimal:

a) $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1$; b) $7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$;
c) $5 \cdot 10 + 2$; d) $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$;
e) $7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10$; f) $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 3$;
g) $5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$; h) $3 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10 + 7$;
i) $1 \cdot 10^3 + 1$.

❒**2.** Se ştie că a, b, c, d sunt cifre în sistemul zecimal. Scrieţi următoarele numere ca numere în sistemul zecimal:

a) $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$; b) $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$;
c) $a \cdot 10 + b$; d) $a \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + a$;
e) $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$; f) $a \cdot 10^3 + b \cdot 10 + c$;
g) $100a + 10b + c$; h) $100a + 10a + a$;
i) $1000a + 10b + c$; j) $10000a + 1000b + 100a + 10b + c$;
k) $1000a + 100b$; l) $1000a + 10b + c$;
m) $1000a + 100a + 10b + c$.

❒**3.** Scrieţi următoarele numere descompuse în bază 10;

a) 127; b) 2137; c) 53; d) 27385;
e) 705; f) 230; g) 20035; h) 705102.

❒**4.** Fie a, b, c, d cifre în sistemul zecimal. Scrieţi următoarele numere descompuse în baza 10.

a) $\overline{abc}$; b) $\overline{ab}$; c) $\overline{abcd}$; d) $\overline{aab}$;
e) $\overline{aaaa}$; f) $\overline{a0b}$; g) $\overline{ab0cd}$; h) $\overline{aab0c0}$;
i) $\overline{abab}$; j) $\overline{a0b000c}$.

❒**5.** Scrieţi poziţional, în baza 10, următoarele sume:

a) $3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$;
b) $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$;
c) $5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
d) $3 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2$;
e) $7 \cdot 10^9 + 5 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^3$.

❒**6.** Scrieţi următoarele numere din baza 10 în baza 2:

a) 23; b) 37; c) 46;
d) 24; e) 72; f) 125.

❒**7.** Scrieţi următoarele numere din baza doi în baza 10:

a) 11_2; b) 1011_2; c) 1100_2; d) 11001_2;
e) 10111_2; f) 1101101_2; g) 10011_2.

❒**8.** Ordonaţi crescător numerele:

a) $222_{(3)}$; $444_{(5)}$; $777_{(8)}$;
b) $1011_{(2)}$; $312_{(4)}$; $2021_{(3)}$;
c) $3185_{(9)}$; $445_{(7)}$; $241_{(5)}$.

❒**9.** Determinaţi baza de numeraţie x astfel încât să aibă loc egalităţile:

a) $102_{(x)} = 27$; b) $10100_{(x)} = 90$; c) $131_{(x)} = 71$;
d) $24_{(x)} = 54$; e) $1201_{(x)} = 46$; f) $2301_{(x)} = 326$.

❒**10.** Arătaţi că numărul $\overline{abcabc}$ se împarte exact prin 1001.

❒**11.** Determinaţi numerele naturale de două cifre scrise în baza zece de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab} = 4 \cdot (a + b)$.

❒**12.** Verificaţi dacă următoarele egalităţi sunt adevărate:

a) $\overline{aa} = 11a$; b) $\overline{abab} = 101 \cdot \overline{ab}$; c) $\overline{a00a} = 1001 \cdot a$;
d) $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a + b)$; e) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c)$.

❒**13.** Aflaţi toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ astfel încât 5 se împarte exact prin numărul (a + b).

❒**14.** Determinaţi numerele naturale consecutive $\overline{ab}$ şi $\overline{ac}$ pentru care $\overline{ab} + \overline{ac} = 113$.

❒**15.** Aflaţi toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ astfel încât 5 se împarte exact prin numărul $(a^2 + b^2)$.

❒**16.** Aflaţi cifra a din sistemul zecimal care verifică egalitatea:

$$\overline{aaa} + \overline{aa} + a = 369.$$

❒**17.** Arătaţi că diferenţa dintre un număr de trei cifre şi răsturnatul său nu poate fi pătrat perfect.

❒**18.** Determinaţi toate numerele scrise în baza 10 de forma $\overline{ab}$ care sunt cu 36 mai mari decât $\overline{ba}$.

❒**19.** Un număr natural de trei cifre, scris în baza zece împărțit la răsturnatul său dă câtul 5 și restul 46. Calculați numărul știind că diferența dintre cifra zecilor și cea a unităților este 2.

❒**20.** Aflați numărul $\overline{abcd}$ care verifică egalitatea $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=3102$.

❒**21.** Scrieți pozițional, în baza 10, numerele naturale care se obțin din scrierea: $3\cdot 10^n + 7\cdot 10^{n+1} + 5\cdot 10^{n+2}$ pentru n luând valorile 1, 3, 5.

❒**22.** Stabiliți în ce bază de numerație are loc relația: $32_{(x)} = 23_{(10)}$.

❒**23.** Rezolvați în numere naturale ecuația: $3^x + 2\cdot 3^y + 2\cdot 3^z = 225$, $x < y < z$.

❒**24.** Determinați în ce bază de numerație are loc relația: $13_{(x)} + 31_{(x)} = 16$.

❒**25.** Să se arate că dacă $31_{(x)} = 23_{(y)}$, atunci restul împărțirii sumei x + y la 3 este 1.

❒**26.** Comparați numerele: $2^{37} + 2^{19}$ și $2^{29} + 2^{23} + 2^{15}$.

Indicație: Se compară în baza doi.

❒**27.** Verificați dacă următoarea inegalitate este adevărată: $\underbrace{\overline{111.....1}}_{\text{de 1998 ori}}{}_2 > 2^{1998}$.

❒**28.** Scrieți numerele 43, 39 și 117 ca sume de puteri ale lui 2.

❒**29.** Determinați numerele naturale a, b și c care verifică egalitatea:
$2^{2a+1} + 2^{3b} + 2^{2c} = 112$.

❒**30.** Dacă a și b sunt cifre consecutive în baza zece cu a > b, atunci arătați că: $\overline{aaa} + 333^2 = \overline{111bbb}$.

17. Propoziții adevărate și propoziții false

✎ *Oamenii comunică între ei prin viu grai sau în scris. Prin comunicări, rostite sau scrise, ei își transmit opinii, comenzi, întrebări, îndoieli etc.*

✎ *În matematică, prin **propoziție** se înțelege o comunicare, adevărată sau falsă, care nu poate fi și adevărată și falsă.*

✎ *Valoarea de adevăr a unei propoziții se notează cu A sau cu F; litera A arată că **propoziția este adevărată**, iar litera F arată că **propoziția este falsă**.*

✎ *Propozițiile se notează cu literele: p, q, r, s, ...*

✎ *Prin **predicat** în matematică se înțelege o comunicare care exprimă o proprietate referitoare la una sau mai multe elemente variabile.*

EXERCIȚII

☑**1.** Precizați care dintre următoarele comunicări sunt predicate și care sunt propoziții:

a) $x + 7 < 11$; b) $3\cdot 7 = 15$; c) $15 + 23 = 38$;
d) $3x = 18$; e) $0 : 7 = 0$; f) $x\cdot 0 = 0$;
g) $150 \vdots 10$; h) $143 \vdots 5$; i) $\overline{17a} \vdots 2$;
j) Afară este frumos; k) $2^{70} < 3^{47} = 3^{46}$; l) $2^3 > 3^2$.

☑**2.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții:

a) $5 + 6\cdot 3 = 23$; b) $18 + 10:2 = 14$;
c) $(1 + 2^2\cdot 2^5) : (2^3\cdot 2^4 + 1) = 1$; d) $2^{21} < 3^{14}$;
e) $1 + 3 + 5 + \ldots + 99 < 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$.

❒**3.** Completați următoarele comunicări pentru a obține propoziții adevărate:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots = 5050$;
b) Pentru a numerota cele 1540 pagini ale unei cărți se folosesc ... cifre.

❒**4.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții matematice:

p: „Suma a două numere naturale consecutive este un număr impar.“
q: „Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.“

❒**5.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții matematice:

p: „$x + 7 = 10$, pentru $x = 3$“
q: „$x < 7$ pentru x număr natural mai mic decât 5“
r: „$2x > 14$ pentru x număr natural mai mare decât 5“

☒6. Aflați valorile naturale ale lui x pentru care următoarele predicate logice sunt propoziții adevărate:

a) $x - 10 = 12$; b) $3x = 21$; c) $x : 5 = 9$;
d) $12 : x = 3$; e) $17 - x = 9$; f) $2x - 7 = 11$;
g) $3x = 10 + 2x$; h) $2(3x - 1) = 5x + 7$.

☒7. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) $2 \cdot 17 + 5 = \ldots$ b) $27 : 3 - 2 = \ldots$ c) $18 - 6 : 2 = \ldots$
d) $24 : \ldots = 3$ e) $25 + \ldots \cdot 2 = 35$.

❒8. Stabiliți valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții:

p: „$a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b"
q: „$a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a și b"
r: „$2a + 4b + 1$ este număr natural impar oricare ar fi numerele naturale a și b"
s: „$0 : a = 0$, oricare ar fi a un număr natural"
t: „$a : a = 1$ oricare ar fi a număr natural nenul"

❒9. Stabiliți valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții:

p: „există a număr natural astfel încât $a + 7 = 9$"
q: „există a număr natural astfel încât $2(a + 3) < 2a + 6$"
r: „există x număr natural pentru care numărul $x^2 + x$ este număr natural impar"

❒10. Stabiliți valoarea de adevăr pentru propoziția:

p: „Numărul $n^2 + n + 11$ este număr prim oricare ar fi n număr natural".

❒11. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $312_{(4)} + 10_{(4)} = 58_{10}$; b) $1010_{(2)} + 111_{(2)} = 17_{10}$;
c) $3^{101} : 9^{50} = 3$; d) $(3^{57} : 9^{25} \cdot 3^{10}) : 3^{15} = 9$;
e) $2 \cdot 4 \cdot 2^{43} - 2^{46} + [9^{74} : 3^{43} - (3^{15})^6]^0 = 15$.

❒12. Stabiliți valoarea logică a următoarelor propoziții:

a) $11 + 13 + 15 + \ldots + 99 = 12 + 14 + 16 + \ldots + 100$;
b) $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 99 < 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 100$;
c) ultima cifră a numărului: $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$ este 5;
d) ultimele două cifre a numărului: $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 2000$ sunt 00.

❒13. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Există două numere naturale nenule astfel încât $a + b = a \cdot b$.
b) Oricare ar fi trei numere naturale consecutive, produsul lor se divide cu 6.
c) Toate puterile lui 5 dau prin împărțirea la 5 restul 0.

d) Suma oricăror trei numere naturale consecutive este un număr impar.
e) Ultima cifră a numărului: $16^{1998} + 17^{1999} + 18^{2000} + 19^{2001} + 20^{2002}$ este 7.

❒14. Completați următoarele enunțuri pentru a obține propoziții adevărate:

a) $3 + 3 \cdot [17 + (30 - 2 \cdot 3) : 6] : 7 = \ldots$;
b) $[20 \cdot (125 + 5) - 2 \cdot 300] : 100 = \ldots$;
c) $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 = \ldots$;
d) $3^{2001} - 3^{2000} - 3^{999} - \ldots - 5^{223} - 5^{222} = \ldots$

❒15. Determinați valorile naturale ale lui x pentru care fiecare dintre următoarele propoziții este adevărată:

a) $7 \cdot x < 21$; b) $x + 125 < 127$; c) $27 - x < 2$;
d) $x \cdot 81 = 243$; e) $2x + 15 = 25$; f) $375 - x = 143$.

❒16. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Suma numerelor pare cuprinse între 10 și 20 este 60.
b) $4^{2525} - 2^{5048} = 3 \cdot 2^{5050}$.
c) $13_{(5)} + 1021_{(3)} = 132_{(5)}$.
d) Oricare ar fi n număr natural, n este par.
e) Există numere naturale pare.

❒17. Aflați valoarea logică a propozițiilor:

a) $1 + 3^{10} > 3^{11} : 3 + 3^5 + 3^0$;
b) $7 + 4^2 : 4 + 4^2$ este cubul unui număr natural;
c) $2003 + 2003 \cdot 2002$ este pătrat perfect;
d) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 243$;
e) $5^{200} : 5^{197} = (5^2)^3 - 2 \cdot 5^5$.

18. „Nu", „şi", „sau", „dacă - atunci"

✎ *Cu ajutorul cuvintelor „nu", „şi", „sau", „dacă – atunci", numite* ***conectori logici****, din propoziţii logice se obţin propoziţii noi, valorile de adevăr ale acestora fiind bine determinate de valorile de adevăr ale propoziţiilor date.*

„Nu". Negaţia unei propoziţii

Prin negarea unei propoziţii se obţine o nouă propoziţie, numită ***negaţia propoziţiei date****, care este adevărată dacă propoziţia dată este falsă şi este falsă dacă propoziţia dată este adevărată.*

Negaţia unei propoziţii p se notează ¬p (citim „non p").

Modul în care valoarea de adevăr a negaţiei unei propoziţii depinde de valoarea de adevăr a propoziţiei date este prezentat într-un tabel numit ***tabla de adevăr a negaţiei*** *(fig. 1)*

p	¬p
A	F
F	A

Fig. 1

„Şi". Conjuncţia propoziţiilor

Două propoziţii date legate prin „şi" formează o nouă propoziţie, numită ***conjuncţia propoziţiilor date****, care este adevărată numai dacă ambele propoziţii sunt adevărate.*

Conjuncţia propoziţiilor p, q se notează cu p ∧ q (citim „p şi q").

Prezentăm în figura 2 tabla de adevăr a conjuncţiei.

p	q	p ∧ q
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

Fig. 2

„Sau". Disjuncţia propoziţiilor

Două propoziţii date legate prin „sau" formează o nouă propoziţie, numită ***disjuncţia propoziţiilor date****, care este adevărată dacă cel puţin una din propoziţiile date este adevărată.*

Disjuncţia propoziţiilor p, q se notează cu p ∨ q (citim „p sau q").

Prezentăm în figura 3 tabla de adevăr a disjuncţiei.

p	q	p∨ q
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

Fig. 3

„Dacă – atunci". Implicaţia propoziţiilor

Propoziţia „dacă p, atunci q", formată din două propoziţii date p, q, se numeşte ***implicaţia propoziţiilor*** *şi este falsă numai dacă p este adevărată, iar q este falsă.*

Implicaţia propoziţiilor p, q se notează p → q (citim „dacă p, atunci q" sau „p implică q"); p se numeşte ***ipoteza****, iar q se numeşte* ***concluzia*** *implicaţiei.*

Prezentăm în figura 4 tabla de adevăr a implicaţiei.

p	q	p→ q
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

Fig. 4

În cazul în care propoziţia p → q este adevărată, notăm, „p ⇒ q".

** În raţionamentele (judecăţile) pe care le facem pentru a stabili valoarea de adevăr a unor propoziţii sau în rezolvarea unor probleme trebuie să ţinem cont de următoarele propoziţii, evident adevărate, numite* ***tautologii, principii*** *(sau legi) logice:*

Principiul noncontradicţiei

O propoziţie nu poate fi şi adevărată şi falsă.

Principiul negaţiei

O propoziţie şi negaţia ei nu pot avea aceeaşi valoare de adevăr.

Principiul terţului exclus

O propoziţie este sau adevărată sau falsă (a treia posibilitate nu există).

Principiul dublei negaţii

Negaţia negaţiei unei propoziţii şi propoziţia respectivă au aceeaşi valoare de adevăr.

Principiul negării implicaţiei

Negaţia unei implicaţii „dacă p, atunci q" are aceeaşi valoare de adevăr cu propoziţia „p şi non q". (Deci pentru a nega o implicaţie p → q se păstrează ipoteza p şi se neagă concluzia q.)

EXERCIŢII

1. Fie propoziţiile matematice:

p: „$4^{17} < 8^{11}$“,

q: „$10^{30} > 100^{13}$“;

r: „$\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{aa} + \overline{bb}$“.

Aflaţi valorile de adevăr pentru următoarele propoziţii:

a) p, q, r, $\neg$p, $\neg$q, $\neg$r;

b) $p \wedge q$, $p \vee q$, $q \wedge r$, $q \vee r$, $p \vee \neg q$;

c) $q \to r$; $q \to p$, $p \to r$, $\neg r \to p$.

2. Considerăm o propoziţie matematică oarecare p. Stabiliţi valoarea de adevăr pentru următoarele propoziţii matematice:

a) $p \wedge \neg p$; $p \vee \neg p$;

b) $\neg(\neg p) \wedge p$; $\neg(\neg p) \vee \neg p$;

c) $(p \wedge \neg p) \to (p \vee \neg p)$;

d) $(p \vee \neg p) \to (p \wedge \neg p)$.

3. Alcătuiţi negaţiile pentru fiecare din următoarele propoziţii matematice:

p: „$3(x + 7) = 3x + 15$, oricare ar fi x un număr natural“;

q: „există x număr natural astfel încât: $2x - 3 = x$“;

r: „$0:7 = 0$ şi $5^2 < 3^3$“;

s: „$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ sau $(3^x)^2 = 9^x$.

Problemă rezolvată:

Se dau următoarele propoziţii matematice:

p: $3^3 : 9 = 3$;

q: $2^5 \cdot 8 : 4^3 = 2$;

r: $5 \cdot 6 : 2 = 16$.

Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiei:

s: „$[(p \wedge q) \to r] \vee \neg r$“

Soluţie:

Aflăm valoarea de adevăr pentru propoziţiile p, q, r şi $\neg$r.

$3^3 : 9 = 27 : 9 = 3 \Rightarrow$ p(A)

$2^5 \cdot 8 : 4^3 = 2^5 \cdot 2^3 : (2^2)^3 = 2^8 : 2^6 = 2^2 = 4 \Rightarrow$ q(F)

$5 \cdot 6 : 2 = 30 : 2 = 15 \Rightarrow$ r(F)

$r(F) \Rightarrow \neg r(A)$

Acum procedăm asemănător ca la expresiile numerice. Aflăm valoarea de adevăr a propoziţiei din paranteza pătrată şi în final aflăm valoarea de adevăr a întregii propoziţii.

$$\left.\begin{matrix} p(A) \\ q(F) \end{matrix}\right\rbrack \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} (p \wedge q)(F) \\ r(F) \end{matrix}\right\rbrack \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} [(p \wedge q) \to r](A) \\ \neg r(A) \end{matrix}\right\rbrack \Rightarrow [(p \wedge q) \to r] \vee (\neg r)\ (A)$$

Deci s(A).

4. Fie propoziţiile:

p: „$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = 1275$“

q: „Numărul $2^{10} + 2^5$ este pătrat perfect“

r: „Există x număr natural astfel încât : $x^2 + x = 2001$“.

Aflaţi valoarea de adevăr pentru următoarele propoziţii:

a) $[(p \to \neg q) \wedge r] \to \neg q$;

b) $[(p \wedge r) \to \neg q] \wedge p$;

c) $[(\neg p \vee q) \wedge r] \to \neg r$.

Problemă rezolvată:

Arătaţi că oricare ar fi propoziţiile matematice p şi q, următoare propoziţii au aceiaşi valoare de adevăr:

r: „$p \to q$“;

s: „$\neg p \vee q$“.

Soluţie:

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
A	A	A	A
A	F	F	F
F	A	A	A
F	F	A	A

5. Arătaţi că oricare ar fi propoziţiile matematice p şi q următoarele propoziţii au aceeaşi valoare de adevăr:

a) r: „$\neg(p \wedge q)$; s: „$\neg p \vee \neg q$“;

b) r: „$\neg(p \vee q)$; s: „$\neg p \vee \neg q$.

6. Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(5 + 2 \cdot 2^8 + 2^{48} : 2^{18}) : [5 + 2^{12} : 2^3 + (2^5)^6] = 1$;

b) $(2^3 + 2 \cdot 2^4 + 2^9) : (8 + 2^{12} : 2^3 + 2^5) = 2$.

7. Determinaţi:

a) numerele naturale mai mici decât 10 **sau** mai mici decât 5;

b) numerele naturale mai mari decât 10 **şi** mai mici decât 15.

❒**8.** Scrieți negațiile propozițiilor:

a) „Numărul 2310 se divide cu 6".

b) „Cel mai mare număr natural de două cifre care este pătrat perfect este 81".

c) „Nici un număr natural care are ultima cifră 2 nu este pătrat perfect".

❒**9.** Aflați numerele a și respectiv b, știind că:

a) $(a-2)(a-3)=0$; b) $a(b-5)=0$;

c) $ab-20a=0$; d) $(a-25)(b-44)=0$.

❒**10.** I) Știind că a și b sunt numere naturale astfel încât să avem $a \cdot b \neq 0$. Este probabil să avem adevărată situația:

a) $a=5$ și $b=0$; b) $a=0$ și $b=0$;

c) $a=0$ și $b=7$; d) $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

II) Știind că $a \cdot b = 0$. Este posibil să avem adevărată situația:

a) $a=7$ sau $b=0$; b) $a=0$ sau $b=0$;

c) $a=0$ sau $b=5$; d) $a=7$ sau $b=5$.

❒**11.** Verificați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p: $[3+(3^7)^9 : 9^{30}+6\cdot 4^{15} : 16^7]^{21} < \left(2^{4^2} : 2^{3^2}-1\right)^3$.

q: Pentru orice $x \neq y$, numărul $x^y - y^x \neq 0$.

r: Numărul $9+8\cdot(9+9^2+\ldots+9^x)$ este pătrat perfect pentru orice $x \in \mathbf{N}^*$.

❒**12.** Care din următoarele propoziții sunt adevărate?

a) Există valori ale lui x, număr natural, pentru care produsul $x \cdot (x+1)$ este număr natural impar.

b) Oricare ar fi cifrele x și y, suma $\overline{xy}+\overline{yx}$ se împarte exact la 11.

c) Pentru orice număr natural n, $5^n+5^n=5^{n+1}$.

❒**13.** Fie propozițiile:

p: „Numărul 4 este număr par",

q: „Numărul 4 este număr impar".

a) Scrieți propozițiile: p sau q; p și q; $\neg p$; $\neg q$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: p, q, p sau q, p și q, $\neg p$, $\neg q$.

❒**14.** Fie propozițiile:

p: „Oricare ar fi numerele naturale x și y diferite de zero, $x^2+y^2=0$";

q: „Există numere naturale x și y astfel încât $x^2+y^2=0$".

a) Scrieți propozițiile: p sau q; p și q; $\neg p$ și $\neg q$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: p; q; p sau q; p și q.

❒**15.** Determinați:

a) numerele naturale mai mari ca 10 și mai mici ca 15;

b) numerele naturale mai mici ca 8 sau mai mici ca 5;

c) numerele naturale de două cifre care sunt pătrate perfecte și cu ultima cifră 6;

d) numerele naturale de două cifre mai mici ca 30 care se împart exact la 5 sau la 3;

❒**16.** Determinați:

a) numerele naturale mai mici sau egale cu 25 care împărțite la 7 dau restul 4;

b) numerele naturale mai mici sau egale cu 20 și mai mari ca 10 care se împart exact la 5;

c) numerele naturale mai mici ca 50 care împărțite la 12 dau restul 7 și împărțite la 4 dau restul 3.

❒**17.** Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p : „Dacă valoarea unui obiect poate fi plătită în bancnote de 10.000 de lei, atunci ea poate fi plătită și în bancnote de 5.000 de lei".

q: „Dacă un număr natural nu este par, atunci el este impar".

r: „Dacă un număr natural are ultima cifră 4, atunci pătratul său are ultima cifră 2 sau 1".

❒**18.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p: „$a=b \Leftrightarrow a\cdot c=b\cdot c$, oricare ar fi a, b, c numere naturale";

q: „$a\leq b \Leftrightarrow a\cdot c\leq b\cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c";

r: „$a-5=7$, a natural $\Leftrightarrow a+7=19$".

❒**19.** Fie propozițiile:

p_1: „Orice număr natural este par";

p_2: „Cel puțin un număr natural este par";

p_3: „Există numere naturale impare".

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor.

b) Negați propozițiile și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor obținute.

❒**20.** Fie propozițiile:

p: $[3+(27)^{21} : 9^{30}+6\cdot 3^{30} : 9^{14}]^2 < \left(2^{3^3} : 2^{4^2} : 4^5+3^{2^3} : 9^3+1\right)^2$;

q: $3+3^2+3^3+3^4=2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7-2\cdot 67$;

r: $(140+505):(10+5)+(897-22):25>300:2:3+412:4+816:8$;

s: numărul $51+2(1+2+3+\ldots+50)$ este pătrat perfect.

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor.

b) Negați propozițiile și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor obținute.

19. Mulțime. Element. Relația de apartenență

✎ *MULȚIMEA este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite* ***elementele mulțimii****.*

Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele mulțimii se notează cu litere mici.

Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi „x aparține lui A". Dacă x nu este un element al mulțimii A, atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi „x nu aparține lui A".

O mulțime poate fi dată în două moduri:

1. ***numind fiecare element al mulțimii****, în acest caz mulțimea se scrie punând între acolade elementele sale.*

EXEMPLU: A = {0, 1, 2, 3}.

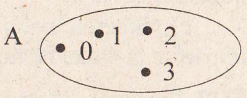


Fig. 1

În acest caz, mulțimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare.

Acest mod de ilustrare se numește ***diagramă Venn-Euler****.*

2. ***enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii*** *(pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are nici un alt element care nu aparține mulțimii).*

EXEMPLU: A = {x | x este număr natural și x < 4}.

Mulțimea care nu are nici un element se numește ***mulțimea vidă****; ea se notează cu simbolul ∅.*

Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită ***mulțimea numerelor naturale****. Aceasta se notează cu N. Așadar:*

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Numărul de elemente al unei mulțimi A se numește ***cardinalul*** *mulțimii A și se notează* ***card A****.*

EXERCIȚII

❒**1.** Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:
a) bibliotecă; b) cinematecă; c) actualități.

❒**2.** Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 43257; b) 524123; c) 17230415; d) 425730.

❒**3.** Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 4.

❒**4.** Scrieți mulțimea numerelor naturale cuprinse între 6 și 14.

❒**5.** Scrieți mulțimea cifrelor: a) pare; b) impare.

❒**6.** Fie mulțimile: A = {a, b, c}; B = {c, d, e}; C = {a, c, e}.
a) Cărora dintre mulțimi le aparține elementul a?
b) Cărora dintre mulțimi le aparține elementul b?

❒**7.** Fie mulțimile: A = {1, 3, 4, 7} și B = {2, 4, 7, 9}. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2 \in A$; b) $3 \notin A$; c) $2^2 \in B$;
d) $7 \in A$; e) $7^0 \in A$; f) $2 \notin B$;
g) $1^{2003} \in A$; h) $9 \in B$; i) $4 \in A$ și $4 \in B$;
j) $4 \in A$ sau $4 \in B$; k) $1 \in A$ sau $7 \in B$; l) $3 \in A$ sau $3 \in B$;
m) $7 \in A$ și $3 \notin B$; n) $2 \notin A$ și $5 \notin B$.

❒**8.** Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor:

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; B = {0, 2, 4, 6, 8};
C = {1, 3, 5, 7, 9}; D = {1, 3, 9, 27, 81, 243}.

❒**9.** Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $3 \in \{0, 1, 3, 7, 9\}$; b) $2 \in \{1, 4, 5\}$;
c) $5 \notin \{0, 2, 3, 7\}$; d) $4 \notin \{2, 4, 6, 8, 9\}$;
e) $0 \in \emptyset$; f) $4 \in \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 5\}$;
g) $2^{21} \in \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 3^{14}\}$; h) $10 \in \{x \in \mathbf{N} \mid 7 \leq x < 12\}$.

❒**10.** Fie A = {0, 1, 3} și $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și calculați card B.

❒**11.** Indicați propozițiile false:

a) $2 \in \{1, 7, 3\}$; b) $7^0 \in \{1, 3, 9\}$; c) $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
d) $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$; e) $0 \in \emptyset$; f) $0 \notin \emptyset$.

❒**12.** Scrieți următoarele mulțimi enumerând elementele acestora:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \leq 4\}$;
$C = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \leq x < 7\}$; $D = \{x \in \mathbf{N} \mid 4 < x \leq 10\}$.

❒**13.** Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbf{N}, k \leq 3\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x = 2^k, k \in \mathbf{N}, k < 4\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x = 3k - 1, k \in \mathbf{N}^*, k < 5\}$;
$D = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x = 4k + 3, k \in \mathbf{N}, k < 3\}$;
$E = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 2^x \leq 32\}$;
$F = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, x^4 \leq 64\}$.

❒**14.** Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbf{N}^*, n \leq 5\}$;

$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 < 12 \text{ și } x^2 \geq 9\}$;

$D = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbf{N}\}$.

❒**15.** Aflați cardinalul mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 2001\}$; $B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \leq 1957\}$;

$C = \{x \in \mathbf{N} \mid 4 \leq x \leq 10\}$; $D = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 < x < 7\}$;

$E = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 < x \leq 14\}$; $F = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leq x < 2002\}$.

❒**16.** Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x + 3 < 7\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ și } x \leq 3^3 - 2\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}$;

$D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\}$;

$E = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \text{ este pătrat perfect și } x \text{ are ultima cifră } 3\}$;

$F = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } 2^{x+1} = 32\}$.

❒**17.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}$;

b) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbf{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}$;

c) $\{x \in \mathbf{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\}$.

❒**18.** Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$.

❒**19.** Fie mulțimile:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}$;

$C = \{x \in \mathbf{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}$.

Scrieți elementele mulțimilor. Ce observați?

❒**20.** Determinați mulțimile

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = \overline{1ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$;

$C = \{x \in \mathbf{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}$.

20. Relații între mulțimi. Submulțimi

✎ *Două mulțimi sunt* ***egale*** *dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm A = B, iar dacă nu sunt egale notăm A ≠ B.*

✎ *Fie A și B două mulțimi; A este* ***inclusă*** *în B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B. Se scrie A ⊂ B. Se mai spune că B* ***include*** *pe A și se scrie B ⊃ A. În acest caz se spune despre A că este o* ***submulțime*** *a lui B. Dacă A nu este inclusă în B, adică A nu este o submulțime a lui B, notăm A ⊄ B (citim „A nu este inclus în B") sau B ⊅ A (citim „B nu include pe A").*

✎ *Se consideră că mulțimea ∅ este* ***submulțime*** *a oricărei mulțimi A.*

✎ *Orice mulțime este* ***inclusă*** *în ea însăși.*

Deci A ⊂ A, oricare ar fi mulțimea A.

✎ *Două mulțimi sunt* ***egale*** *dacă fiecare din ele este o submulțime a celeilalte mulțimi.*

EXERCIȚII

❒**1.** Scrieți toate submulțimile mulțimilor:

a) $\{1, 2\}$; b) $\{2, 3, 5\}$; c) $\{a, b, c\}$.

❒**2.** Scrieți trei submulțimi ale mulțimii numerelor naturale.

❒**3.** Scrieți toate mulțimile X care îndeplinesc condițiile:

$\{1, 3\} \subset X$ și $X \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$

❒**4.** Dați trei exemple de mulțimi egale cu mulțimea vidă.

❒**5.** Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3x \leq 10\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x + 2 < 7\}$.

a) Scrieți elementele celor două mulțimi.

b) Stabiliți dacă $A \subset B$ sau $B \subset A$.

❒**6.** Care dintre mulțimile de mai jos sunt egale:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x < 8\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$

$C = \{x \in \mathbf{N} \mid 4 \leq x \leq 7\}$, $D = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 3, x \text{ cifră}\}$

$E = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5, x \text{ număr par}\}$

❒**7.** Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\{1, 2, 5\} \subset \{0, 1, 2, 5, 7\}$;

b) $\{1, 2, 5\} \supset \{0, 1, 2, 5, 7\}$;

c) $\{3, 7, 11\} \supset \{3\}$;

d) $\{x \in \mathbf{N}^* \mid x < 2\} \subset \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 2\}$;
e) $\varnothing \subset \{0\}$;
f) $\{x \in \mathbf{N}^* \mid x < 5\} \subset \{x \in \mathbf{N} \mid x$ este cifră a numărului 34021$\}$.

❒**8.** Fie $M = \{11, 21, 31, \ldots, 91\}$.
a) Scrieți cardinalul mulțimii M.
b) Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M formate din câte patru elemente.
c) Scrieți toate submulțimile mulțimii M formate din câte opt elemente.

❒**9.** Fie $M = \{0, 1, 7\}$.
a) Scrieți toate submulțimile mulțimii M.
b) Scrieți mulțimea X formată din submulțimile mulțimii M.
c) Scrieți cardinalul mulțimii X.

❒**10.** Fie $M = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$.
a) Scrieți elementele mulțimii M.
b) Scrieți trei submulțimi care sunt incluse în M.
c) Scrieți trei mulțimi care includ mulțimea M.

❒**11.** Determinați toate valorile lui x pentru care următoarele afirmații să fie adevărate:
a) $\{x\} \subseteq \{2, 4\}$;
b) $\{2, 3, x\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$;
c) $\{1, x, 4\} \subseteq \{1, 4, 6, 7\}$.

❒**12.** Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:
a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B, atunci A … B.
b) Dacă există în mulțimea A cel puțin un element care nu este element al mulțimii B, atunci A … B.
c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A, atunci A … B.

❒**13.** Fie mulțimile: $A = \{2x - 1; x; 3x + 1\}$ și $B = \{2(x + 1) - 3; 2x - 7; 2x + 8\}$. Determinați $x \in \mathbf{N}$ astfel încât A = B.

❒**14.** Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{2\}$; $D = \{2, 3, 4\}$; $E = \{3, 2\}$. Completați spațiile punctate cu unul din simbolurile: „$\subset$“, „$\supset$“, „$\not\subset$“, „$\not\supset$“, „$=$“ sau „$\neq$“.

a) A … B;	b) C …A;	c) B … D;
d) B … E;	e) C … D;	f) E … A.

❒**15.** Fie $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*$ și $x \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $2 \leq x < 5\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Care din următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:

a) $3 \in A$;	b) $1 \notin B$;	c) $\{0, 1\} \subset A$;
d) $\{2, 3, 4\} \subseteq B$;	e) $\varnothing \subset C$;	f) $C \supset A$;
g) $B \not\subset C$;	h) $\{1, 5\} \not\subset C$.	

❒**16.** Fie relațiile:

a) $\{1\} \subset \{1, 4\}$;	b) $1 \in \{1, 4\}$;	c) $1 \subset \{1, 4\}$;
d) $\{1\} = 1$;	e) $\varnothing = \{1\}$;	f) $\varnothing \subset \{1\}$;
g) $\{2, 3, 4\} \in \{1, 2, 3, 4\}$;		h) $\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Care din acestea sunt corecte? Explicați.

❒**17.** Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $4 \leq x \leq 7\}$; $B = \{y \mid y = x + 2, x \in A\}$; $C = \{z \mid z = 2x, x \in A\}$.
a) Scrieți mulțimile A, B și C.
b) Calculați card A, card B, card C.
c) Precizați care din propozițiile următoare sunt false și care sunt adevărate:
1) $\{5, 6\} \subset A$; 2) $A \subset C$; 3) $\{7, 8\} \subseteq B$.

❒**18.** Precizați cardinalul mulțimilor:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 4 \leq x^2 < 70\}$; $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 < x^3 \leq 125\}$.

❒**19.** Fie mulțimea: $M = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 3x + a < 14, a \in \mathbf{N}\}$. Determinați a, număr natural, astfel încât:
a) card M = 0; b) card M = 1; c) card M = 2; d) card M = 3.

❒**20.** Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 3 < 9\}$; $B = \{y \in \mathbf{N} \mid y + 2 < 8\}$; $C = \{z \in \mathbf{N} \mid z = 3^n, n \in \mathbf{N}, n \leq 2\}$.
a) Scrieți elementele mulțimilor A, B și C.
b) Precizați care din propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false: $A = B$, $A \subset C$, $C \subset B$, $A = C$, $A \not\supset B$, $B \neq C$.

21. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimile N și N*. Mulțimea divizorilor și mulțimea multiplilor unui număr natural

✎ *O mulțime care are n elemente, unde n este un număr natural, este o* ***mulțime finită****.*

✎ *O mulțime care nu este finită se numește* ***mulțime infinită****.*

✎ *Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele șirului numerelor naturale este* ***mulțimea numerelor naturale****. După cum știm deja, aceasta se notează cu N:*

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., 100, 101, 102, ...\}.$$

✎ *N^* este mulțimea numerelor naturale nenule:*

$$N^* = \{1, 2, 3, ..., 100, ...\}.$$

✎ *Mulțimile N și N^* sunt mulțimi infinite și $N^* \subset N$.*

✎ *Fie a un număr natural. Notăm cu D_a mulțimea divizorilor lui a:*

$$D_a = \{n \mid n \in N \text{ și } n \mid a\}.$$

Evident D_a nu este mulțimea vidă ($D_a \neq \emptyset$) deoarece D_a are cel puțin un element ($a \in D_a$, căci $a \in N$ și $a \mid a$). Se observă că $D_a \subset N$ (pentru $a \neq 0$); $D_0 = N$ și $D_1 = \{1\}$.

✎ *Notăm cu M_a mulțimea multiplilor lui a:*

$$M_a = \{m \mid m \in N \text{ și } m \text{ este multiplul lui } a\}.$$

Evident M_a nu este mulțimea vidă ($M_a \neq \emptyset$) deoarece M_a are ca elemente pe a, 2a, 3a, ... Deci $M_a = \{0, a, 2a, 3a, 4a, ...\}$. Se observă că $M_a \subset N$ (pentru $a \neq 1$), $M_0 = \{0\}$ și $M_1 = N$.

✎ *Oricare ar fi a număr natural nenul,* ***mulțimea divizorilor lui a este finită****, iar* ***mulțimea multiplilor lui a este infinită****.*

EXERCIȚII

❒**1.** Scrieți mulțimile: D_2, D_{14}, D_{44}, D_7, D_{28}, D_{18}, D_{39}, D_{45}.

❒**2.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru propozițiile:
a) $D_4 \subset D_{20}$; b) $D_7 \subset D_{28}$; c) $D_3 \subset D_{13}$.

❒**3.** Determinați mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } x \in D_{15}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}^* \text{ și } x + 1 \in D_{18}\}$;
$C = \{x \in D_{10} \text{ și } x + 2 \in D_{12}\}$; $D = \{x \in M_{10} \text{ și } x - 4 \in D_{26}\}$;
$E = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, x \in M_5, x \in M_7 \text{ și } x \leq 100\}$.

❒**4.** Determinați mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 18 \text{ și } 2x + 3 \leq 15\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 14 \text{ și } 2x - 1 < 19\}$.

❒**5.** Determinați mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } 3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } 41 \mid (2x - 1)\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } 5 \mid (3x - 1)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } 4 \mid (x + 2)\}$.

❒**6.** Scrieți elementele următoarelor mulțimi:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, (x + 2) \mid 50 \text{ și } 3 \mid x\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, (2x + 3) \mid 18\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 4 \leq 2x < 10 \text{ și } (2x + 1) \mid 7\}$.

❒**7.** Fie mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (x + 1) \mid (x + 7)\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } x \mid (x + 6)\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (x - 1) \mid x\}$.
a) Scrieți mulțimile A, B, C enumerând elementele acestora.
b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

❒**8.** Să se determine mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (x - 5) \mid (3x + 18)\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (2x + 1) \mid (4x + 19)\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (x + 2) \mid (5x + 27)\}$.

❒**9.** Determinați mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (2x - 1) \mid 121\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (3x + 1) \mid 125\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (x + 1) \mid (x + 50)\}$;
$D = \{x \mid x \in \mathbf{N}, (2x + 1) \mid 65 \text{ și } 17 \nmid (x + 2)\}$.

❒**10.** Fie mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 45 \text{ și } 3 \mid x\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 8 \text{ sau } x \mid 6\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, (x + 3) \mid 36 \text{ și } 4 \mid x^2\}$.
a) Scrieți mulțimile enumerând elementele acestora.
b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

❒**11.** Determinați mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (2x + 1) \mid (3x + 5)\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (x + 1) \mid (x^2 + 2)\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } (x + 2) \mid (x^2 + 4x + 15)\}$.

❒**12.** Determinați mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $(x-1) \mid 11\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $(x+1) \mid 16\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, (x+2) \mid 20, 3 \mid x\}$.

❒**13.** Fie mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 18$ și $2x + 3 < 15\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 14$ sau $2x - 1 < 19\}$.

Determinați mulțimile A și B.

❒**14.** Determinați mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $7 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $42 \mid (2x-1)\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $5 \mid (3x+1)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $4 \mid (x+5)\}$.

❒**15.** Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $2 \mid \overline{3x8}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $6 \mid \overline{x56}\}$.

Determinați mulțimile A și B.

22. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Reprezentarea pe axă

✎ *Se numește* ***număr întreg*** *numărul natural 0 sau orice număr natural diferit de zero precedat fie de semnul + (plus), fie de semnul – (minus).*

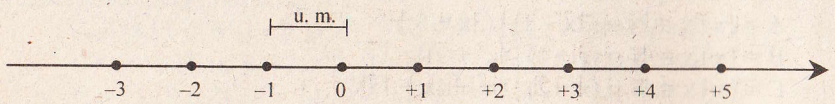
✎ *Mulțimea numerelor întregi se notează cu* $\mathbf{Z}$.

✎ *Mulțimea* $\{+1, +2, +3, \ldots\}$ *este o submulțime a lui* $\mathbf{Z}$, *se notează cu* $\mathbf{Z}_+^*$ *și se numește* ***mulțimea numerelor întregi pozitive***.

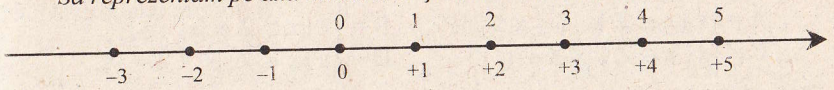
✎ *Mulțimea* $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ *este o submulțime a lui* $\mathbf{Z}$, *se notează cu* $\mathbf{Z}_-^*$ *și se numește* ***mulțimea numerelor întregi negative***.

✎ *Se numește* ***opusul*** *unui număr întreg diferit de zero acel număr întreg care se obține din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.*

✎ *Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. Reamintim că* ***axa numerelor*** *este o dreaptă pe care am fixat o* ***origine***, *un* ***sens pozitiv*** *și o* ***unitate de măsură.***



Să reprezentăm pe axa numerelor și numerele naturale.



Se observă că orice număr natural n coincide cu numărul întreg +n; notăm +n = n. Astfel, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{Z}^*$.

EXERCIȚII

❒**1.** Reprezentați pe axă numerele întregi:

a) –4, –2, 0, 1, 3, 5;

b) –3, –1, 1, 2, 4;

c) –5, –2, –1, 0, 1, 3, 5.

❒**2.** Scrieți opusul pentru fiecare din numerele întregi:

a) –12; b) +7; c) –10; d) +123; e) –2000; f) +2001.

❒**3.** Scrieți în ordine crescătoare următoarele numere întregi:

a) –24, +20, –17, +5, –4, +12, 0, –2;

b) –5, +1, –7, +3, –10, +5, –11, +7;

c) –2000, +1000, –1999, +2001, –2101, +2011.

❒**4.** Scrieți:

a) cel mai mic număr întreg pozitiv de două cifre;

b) cel mai mare număr întreg negativ de două cifre distincte;

c) cel mai mic număr întreg negativ de trei cifre distincte.

❒**5.** Scrieți modulul următoarelor numere întregi:

–14, +15, –12, 0, +2, –6, +4, –4, +3.

❒**6.** Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

$A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = 5\}$; $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = -3\}$;

$C = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 3\}$; $D = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| + |-x| = 4\}$.

❒**7.** Calculați:

a) $|-3| + |+2| - |-1|$;

b) $|-2001| - |1999| + |-2011| - |+2010|$;

c) $|+7| - |-2| + |+3| - |-1|$.

❒**8.** Ordonați descrescător numerele:

a) –21, +12, $|-17|$, –11, $|+3|$, $-|-5|$, $-|+7|$;

b) –6, $|+4|$, $-|-3|$, $+|-5|$, $-|+7|$, –17, +15;

c) –4, $+|-12|$, $-|-15|$, $+|-14|$, $-|+17|$, +24, –57.

❒**9.** Enumerați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ și } -3 < x \leq 2\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ și } |x| = 5\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbf{Z}^*, |x| \leq 4\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, |x| + 4 = 5\}$.

❒**10.** Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2n + 1, -2 \leq n \leq 2, n \in \mathbf{Z}\}$;

$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 3n - 1, n < 5, n \in \mathbf{N}^*\}$;

$C = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2m + 3n, m \in \{-2, 1\}, n \in \{-1, 0\}\}$.

❒**11.** Scrieți toate mulțimile X care verifică:

a) $\{-5, -1\} \subset X \subseteq \{-5, -1, 2, 7\}$;

b) $\{-5, -1\} \not\subset X \subset \{-5, -1, 4, 7\}$.

❒**12.** Fie mulțimile: $A = \{-11, -101, -111\}$, $B = \{-117, -116, -115, \ldots, -7, -6, -5\}$. Care din următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:

a) $A \subset B$; b) $B \subset A$; c) $A = B$; d) $B \supset A$.

❒**13.** Din 7 numere întregi consecutive numai două sunt pozitive. Care sunt celelalte numere?

❒**14.** Fie $A = \{-4, +2, 0, -|+7|, |-3|, -|-5|\}$. Scrieți trei submulțimi ale lui A astfel încât cardinalul acestora să fie trei.

❒**15.** Copiați și completați:

a) $|\ldots| = 7$; b) $|\ldots| = 14$; c) $|\ldots| = 0$;

d) $|\ldots| = -5$; e) $|\ldots| = +15$; f) $|\ldots| = 1$.

❒**16.** Copiați și completați tabelul:

x	+2					−3		
|x|					+7			
−x		+3					−6	
|−x|			5					1
−|x|				−4				

❒**17.** Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $|+2| = |-2|$; b) $|-7| > |+7|$; c) $|+21| \geq |-21|$;

d) $|+12| < |-14|$; e) $|0| \leq 0$; f) $|-14| \geq |-21|$.

❒**18.** Fie mulțimea $M = \{-14, 10, -11, 9, -3, 1, 0, 5, -4, 3, -1\}$. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in M \mid |x| \leq 3\}$; $B = \{x \in M \mid |x| \leq 9 \text{ și } |-x| \geq 1\}$;

$C = \{x \in M \mid |-x| > 9\}$; $D = \{x \in M \mid |x| \geq -4 \text{ și } |-x| < 7\}$.

❒**19.** Determinați mulțimile:

$M_1 = \{x \in \mathbf{Z} \mid -3 < x < 5\}$; $M_2 = \{x \in \mathbf{Z}^* \mid -4 \leq x \leq 2\}$;

$M_3 = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \leq 3 \text{ și } x > -2\}$; $M_4 = \{x \in \mathbf{Z} \mid 2x - 1 < 5 \text{ și } x \geq -1\}$;

$M_5 = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = 3 \text{ și } x \leq 0\}$; $M_6 = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = 7\}$.

❒**20.** Fie $M = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 3 \text{ și } x \leq 6\}$. Verificați dacă sunt corecte egalitățile:

$\{x \in M \mid |x - 2| = |x - 3| + 1\} = \{3, 4, 5, 6\}$;

$\{x \in M \mid |x - 1| + |x - 3| = 8\} = \{6\}$;

$\{x \in M \mid |x - 1| + |x - 2| \leq 11\} = \{3, 5\}$.

❒**21.** Completați spațiile punctate cu semnul potrivit pentru a obține propoziții adevărate:

a) $\{-2, 0, 1\} \ldots \mathbf{N}$; b) $\{-7\} \ldots \mathbf{Z}$; c) $\{4\} \ldots \{4\}$;

d) $\varnothing \ldots \{1, 2, 3\}$; e) $\mathbf{N} \ldots \mathbf{Z}$; f) $-2 \ldots \mathbf{Z}$;

g) $\{7\} \ldots 7$; h) $-3 \ldots \mathbf{N}$; i) $\{0\} \ldots \varnothing$.

23. Operații cu mulțimi (reuniune, intersecție, *diferență)

Reuniunea mulțimilor

Reuniunea a două mulțimi A, B este mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre ele.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Ilustrăm reuniunea mulțimilor A și B cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler, reuniunea fiind reprezentată în figura 1 prin porțiunea haşurată.

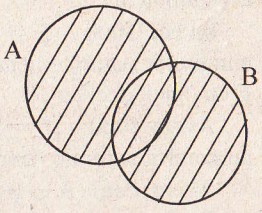


Fig. 1

Intersecția mulțimilor

Intersecția a două mulțimi A, B este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler, intersecția a două mulțimi este ilustrată în figura 2 prin porțiunea haşurată.

*Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci mulțimile A și B sunt **mulțimi disjuncte**.*

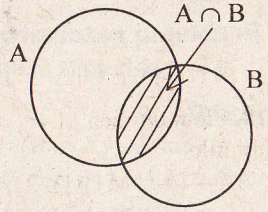


Fig. 2

Diferența a două mulțimi

Fie A și B două mulțimi. Mulțimea formată din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B se numește diferența dintre mulțimea A și mulțimea B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

În figura 3 porțiunea hașurată ilustrează diferența A – B.

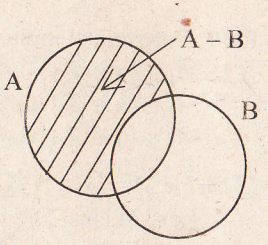


Fig. 3

Principiul includerii și excluderii

$$card\,(A \cup B) = card\,(A) + card\,(B) - card\,(A \cap B).$$

Problemă rezolvată

Aflați câte numere naturale nenule mai mici decât 1001 nu se divid nici cu 2 nici cu 5.

Soluție:

Fie A mulțimea numerelor naturale mai mici decât 1001 care sunt divizibile cu 2.

Avem 1000 : 2 = 500. Deci card (A) = 500.

Fie B mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1001 care sunt divizibile cu 5.

Avem 1000 : 5 = 200. Deci card (B) = 200. $A \cap B$ este mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1001 care sunt divizibile și cu doi și cu cinci, deci cu 10.

Avem 1000 : 10 = 100. Deci card ($A \cap B$) = 100. $A \cup B$ este mulțimea numerelor naturale nenule mai mic decât 1001 divizibile sau cu 2 sau cu 5.

Avem: card ($A \cup B$) = card (A) + card (B) – card ($A \cap B$).

Deci card ($A \cup B$) = 500 + 200 – 100 = 600.

Deci 1000 – 600 = 400 numere naturale nenule mai mici decât 1001 nu sunt divizibile nici cu doi și nici cu cinci.

Problemă rezolvată

Fie A și B două mulțimi astfel încât: $A \cap B = A \cup B$. Arătați că: A = B.

Soluție

Avem $A - (A \cap B) = A - (A \cup B) = \varnothing \Rightarrow A - (A \cap B) = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow A \subset A \cap B \Rightarrow A \subset B$ (1)

Avem $B - (A \cap B) = B - (A \cup B) = \varnothing \Rightarrow B - (A \cap B) = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow B \subset A \cap B \Rightarrow B \subset A$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ A = B.

EXERCIŢII

1. Fie mulțimile A, B și C reprezentate cu ajutorul diagramelor:

a) Enumerați elementele mulțimilor A, B și C.

b) Enumerați elementele mulțimilor:

$M_1 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;

$M_2 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;

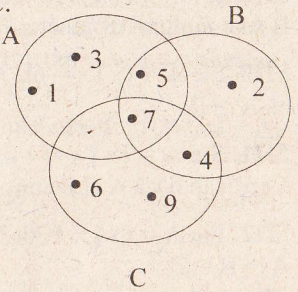
$M_3 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$;

$M_4 = \{x \mid x \in B \text{ sau } x \in C\}$;

$M_5 = \{x \mid x \in B \text{ și } x \in C\}$;

$M_6 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\}$;

$M_7 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}$.



2. Fie mulțimile: A = {1, 2, 5, 6} și B = {2, 3, 7}. Calculați:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

3. Scrieți două mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea {1, 2, 3}. Determinați toate soluțiile.

4. Dacă $M \cup \{2\} = \{1, 2, 3\}$ enumerați elementele mulțimii M.

5. Fie C = {1, 3}.

a) Scrieți două mulțimi având intersecția C.

b) Scrieți trei mulțimi având intersecția C.

6. Fie A = {1, 2}, B = {1, 3, 5} și C = {3, 5, 7}.

a) Determinați $B \cap C$ și $A \cup (B \cap C)$.

b) Determinați $A \cup B$, $A \cup C$ și $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Comparați rezultatele. Ce observați?

7. Fie A = {0, 3}, B = {0, 1, 2}, C = {1, 2, 5}.

a) Determinați $B \cup C$ și $A \cap (B \cup C)$;

b) Determinați $A \cap B$, $A \cap C$ și $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) Comparați rezultatele. Ce observați?

8. Fie mulțimile:

$A = \{x \in \mathbf{Z}^* \mid |x| \leq 4\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leq x \leq 3\}$;

$C = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 3x + 1 < 10\}$.

a) Enumerați elementele mulțimilor A, B, C.

b) Calculați: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $B - C$, $C - B$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A - B) \cup$

$\cup (B - A)$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A - B) \cap C$, $(A \cup B) - C$, $(A \cap B) - A$, $(A - C) \cap (C - A)$.

❒9. Fie $A = \{x \mid x = 5k + 2, k \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbf{N}\}$. Arătați că A și B sunt mulțimi disjuncte.

❒10. Fie $A = \{x \mid x = 6k + 3, k \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 4p + 2, p \in \mathbf{N}\}$. Arătați că $A \cap B = \varnothing$.

❒11. Fie $A = \{x \mid x = 14k + 12, k \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 21p + 17, p \in \mathbf{N}\}$. Verificați dacă A și B sunt disjuncte.

❒12. Fie $A = \{x \mid x = 4k + 3, k \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbf{N}\}$. Arătați că $A \cap B = \varnothing$.

❒13. Fie $A = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2^{20} + 1 \le x \le 2^{20} + 2^{10}\}$. Arătați că $A \cap B = \varnothing$.

❒14. Determinați mulțimile A și B dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
b) $A \cap B = \{3, 5\}$;
c) $A - B = \{1, 6\}$.

❒15. Determinați mulțimile A și B dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; b) $A \cap B = \{a, e\}$;
c) $B - A = \{d, f\}$.

❒16. Determinați mulțimile A și B dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \le 8\}$;
b) $A \cap B = \{2, 3, 5\}$;
c) $A \cup \{2, 5, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$;
d) $B \cup \{0, 2, 4\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

❒17. Într-o clasă sunt 29 de elevi. 19 elevi participă la cercul de informatică și 15 elevi participă la cercul de fizică. Fiecare elev participă la cel puțin una din aceste activități. Calculați câți elevi participă la ambele activități.

❒18. Fie $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x^2 \le 25\}$ și $B = \{x \mid x^3 \le 27\}$.
a) Determinați A, B.
b) Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

❒19. Se dau mulțimile: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d\}$, $C = \{c, d, e\}$. Determinați mulțimile:
a) $(A - B) \cup C$; b) $(A - C) \cap B$; c) $(B - C) \cup (A - \varnothing)$;
d) $A \cup B \cup C$; e) $A \cap B \cap C$; f) $(A \cap B) - C$.

❒20. Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2^k, 1 < k \le 4\}$;
$B = \{y \in \mathbf{N} \mid y = 3^{k-1}, 3 \le k < 6\}$.
Determinați mulțimile: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $(A - B) \cup (B \cap A)$, $(A \cup B) \cap (B - A)$, $A \Delta B$, unde $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ și se numește **diferența simetrică** dintre mulțimea A și mulțimea B.

❒21. Aflați câte numere naturale nenule mai mici decât 100 nu sunt divizibile nici cu 3 nici cu 7.

❒22. Fie mulțimea A care verifică simultan condițiile:
a) $A \cap \{3, 5, 6\} = \{3, 5, 6\}$; b) $A \cup \{3, 5, 6\} = \{3, 5, 6\}$.

24. Probleme recapitulative

❒1. Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x$ este cifră impară$\}$;
$B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 1 \le 5\}$;
$C = \{x \in \mathbf{Z} \mid 2x^2 + 1 \le 19\}$.
a) Enumerați elementele mulțimilor A, B și C.
b) Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - B$, $B - C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \Delta C$.
c) Indicați pe câte o diagramă fiecare din operațiile de la B.

❒2. Determinați mulțimile A și B știind că îndeplinesc simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \cap B = \{2, 3\}$; c) $A - B = \{1\}$.

❒3. Calculați:
a) $\{-2, 0, 1, 3\} \cap \{-2, -1, 0, 5\}$; b) $\{-3, -1, 1, 2\} \cup \{-2, 0, 3\}$;
c) $\{-3, -1, 0, 1, 2\} \cap \mathbf{Z}^*$; d) $\{-3, -1, 0, 1, 2\} \cap \mathbf{N}$;
e) $\{-3, -2, 0, 1, 3\} - \mathbf{Z}^*$; f) $\{-3, -2, 1, 3\} - \mathbf{N}$.

❒4. Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{c, d, e, f\}$.
a) Scrieți submulțimile lui A care sunt submulțimi ale lui B.
b) Scrieți submulțimile lui B care nu sunt submulțimi ale lui A.

❒5. Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
b) $A \cap B = \{b, c\}$
c) $A - B$ și $B - A$ au același număr de elemente.

❒**6.** Determinați cardinalul mulțimilor:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2^{2002} < x < 2^{2003}\}$ și
$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 2^{2002}\}$.

❒**7.** Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = a + a^2, a \in \mathbf{N}\}$
$B = \{y \in \mathbf{N} \mid y = 2b + 1, b \in \mathbf{N}\}$
a) Determinați primele 5 elemente ale mulțimilor A și B.
b) Demonstrați că mulțimile A și B sunt disjuncte.

❒**8.** Fie A și B două mulțimi astfel încât:
a) card $(A \cup B) = 10$, card $A = 5$, card $B = 7$. Calculați card $(A \cap B)$.
b) card $A = 10$ și card $(A - B) = 4$. Calculați card $(A \cap B)$.
c) B este o submulțime a lui A. Calculați $A \cap B$.

❒**9.** Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3^n - 1, n \in \mathbf{N}, n < 4\}$
$B = \{y \in \mathbf{N}^* \mid y = 3m - 1, m \in \mathbf{N}, m \leq 3\}$
Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \cup \varnothing$, $B \cap \varnothing$.

❒**10.** Se consideră mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 8\}$;
$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = 2\}$;
$C = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = -x \text{ și } x \geq -2\}$;
$D = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x - 1| = -3 \text{ sau } |x| = 2\}$.
Determinați mulțimile: A, B, C, D, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cup (B \cap D)$, $(B \cup C) \cap D$, $A - B$, $(A \cup C) - D$, $A - (B \cup C \cup D)$, $A \Delta B$, $C \Delta D$.

❒**11.** Fie mulțimile:
$A = \{\overline{1a6b} \mid 3 \mid \overline{1a6b}, a \leq b \text{ și } 4 \mid (a + b)\}$;
$B = \{\overline{1x6x} \mid 8 \mid \overline{1x6x}\}$.
Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

❒**12.** Se consideră mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 3(x - 2) \leq 2 \cdot (x + 1) - 1\}$;
$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x + 1| = 3 \text{ sau } |x + 1| = 2 \text{ sau } |x + 1| = 5\}$.
a) Determinați mulțimile A și B .
b) Calculați suma elementelor mulțimii B.
c) Calculați: $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $(A \cup B) - (A \cup B)$, $A \Delta B$.

❒**13.** Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; b) $A \cap B = \{c, d\}$;
c) $A \cap \{e, f\} = \varnothing$; d) $\{a, b\} \cap B \neq \varnothing$.

❒**14.** Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2^a + 2^b, \text{ unde } a, b \in \{0, 1, 2\}\}$;
$B = \{y \in \mathbf{N}^* \mid y = x - 1, x \in A\}$;
$C = \{z \in \mathbf{N} \mid z = y^c + 1, c \in \{0, 1\}, y \in B\}$.
a) Determinați mulțimile A, B și C.
b) Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $(A \cap B) \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap (B - C)$, $(A - B) \cup (C - A)$.

❒**15.** Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cap B = \{c, d\}$;
b) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;
c) mulțimile $A - B$ și $B - A$ au același număr de elemente.

❒**16.** Fie $a = [27 \cdot 2^2 \cdot 5 + (7 \cdot 2)^2 - 7] : (9)^{3^{2^0}} + \left[1^{3^{2^5}} + (2^2)^{3^{0^7}}\right]^0$ și
$b = (3^{17} : 9^8)^{2000} : (3^5)^{400}$. Calculați $(a - b)^{2001}$.

❒**17.** Fie $a = [4^{11} \cdot (20)^{20}] : [2^{16} \cdot 125 \cdot (2^5)^3 \cdot 5^7]^2 + 2^3 + (7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2001})^0$;
$b = (41^2 - 82 + 1) : 8 : 5 - (2^6 - 2^5 + 2^2 - 2^0)$ și
$c = 3^{90} - 4 \cdot 9^{44} + 2^{208} : (2 \cdot 4^{103}) - 5 \cdot (9^{22})^2$.
Calculați:
a) $a^c + b^c - 5^2$; b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
c) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; d) $(b - c)(b^2 + bc + c^2)$;
e) $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$.

❒**18.** Se dau numerele naturale:
$a = (2^{20} : 4^5 - 1024 + 10^2 - 2^6 - 6^2)^{2001} + 2001^2 - 2000 \cdot 2001$;
$b = 2 \cdot 10^3 + 1$;
$c = 2^4 \cdot 5^3 : \{13^2 - 2^3 \cdot 11 : [(3^2 \cdot 5 - 3^2)^3 : (2 \cdot 3)^4 : 2 - 2^4 \cdot 17^0 \cdot 1^{2001}]\}$.
a) Calculați: $(a - 2000b)^{2001} + 1$.
b) Arătați că $a + b$ este pătrat perfect.
c) Demonstrați că $b + 2001c$ este multiplu de 17.
d) Arătați că anul reprezentat de $a - 1999b + 3^{4^{0^3}}$ este un an bisect.

❒**19.** Determinați ultima cifră a numerelor:

a) $2004^n + 2004^{n+1} + 2004^{n(n+1)}$, $n \in \mathbf{N}$;

b) $1995^{2001} + 1996^{2001} + 1997^{2001} + 1998^{2001} + 1999^{2001}$;

c) $[(2^7)^2 \cdot (2^2)^8 + 5^{50} : 5^5 - (7^{16})^2] : [(8^5)^2 + (5^3)^{15} - (7^{4^2})^2]$.

❒**20.** Calculați:

a) $\{[1200 \cdot (8 - 200 : 25) + 36] - 3096 : 387\} : 2^2$;

b) $13^2 + 5 \cdot \{2316 : 579 + [40 + 2^3 \cdot (2^4 \cdot 5^2 : 10 - 2^2 \cdot 3^2)] \cdot 5\} + 11$;

c) $2 \cdot [3^3 \cdot 11 : 3 : (148 : 37 + 7)] - 882 : 49$;

d) $[(2^2 \cdot 7 \cdot 2 : 14 - 27 : 3^3) : 1 + 524 : 131] \cdot 6 - 6^2$;

e) $1600 : 4 : [3 \cdot 70 - (2 \cdot 45 - 3^2 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3 : 12) : 5^3 \cdot 2^2 + 95 \cdot 2] \cdot 12$.

❒**21.** Fie numerele:

$a = \left[\left(2^3\right)^2 - 2003^0\right] : 3^{2^{1^{2003}}} - \left(1^{3^4} + 2^{2^{1^{2003}}}\right)$ și

$b = 81 \cdot 11^4 - 33^4 + 1$.

Calculați $(a - b)^{2003}$.

❒**22.** Comparați numerele a și b, unde:

$a = (3^0 + 27^{21} : 81^{15} + 8^{10} : 16^7 - 2^2 \cdot 7)^{63}$ și

$b = (11010_{(2)} + 2003^0_{(10)})^{21}$

NUMERE RAȚIONALE

1. Fracție; reprezentarea fracțiilor cu ajutorul unor desene

✎ ***Fracția*** *este o pereche de numere naturale m și n, cu* $n \neq 0$, *scrisă sub forma*

$$\frac{m}{n},$$

unde m este ***numărătorul*** *fracției și n este* ***numitorul*** *fracției.*

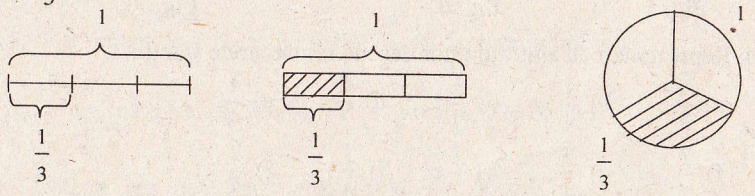
Numărătorul este separat de numitor prin ***linia de fracție****.*

✎ *Numitorul unei fracții arată în câte părți egale a fost împărțit întregul, iar numărătorul arată de câte ori sunt luate astfel de părți.*

✎ *Oricare ar fi n un număr natural avem:*

$$\frac{0}{n} = 0 \text{ și } \frac{n}{1} = n.$$

✎ *Fracțiile pot fi reprezentate cu ajutorul unor desene. De exemplu, fracția* $\frac{1}{3}$ *poate fi reprezentată prin următoarele desene.*



EXERCIȚII

❒**1.** Scrieți fracțiile corespunzătoare pentru:

a) două treimi; b) cinci pătrimi; c) o doime;
d) patru cincimi; e) trei doimi; f) opt zecimi;
g) trei șesimi; h) șapte doimi; i) nouă treimi.

❒**2.** Scrieți cu ajutorul fracțiilor ce parte din întreg reprezintă partea haşurată în figurile:

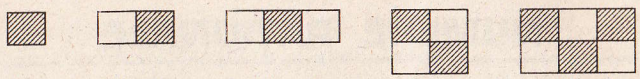
a) 

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

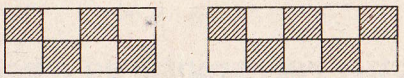


Fig. 6 Fig. 7

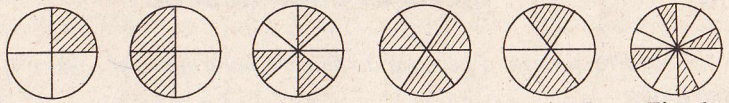
b) 

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

❒3. Scrieți fracțiile reprezentate în următoarele desene:

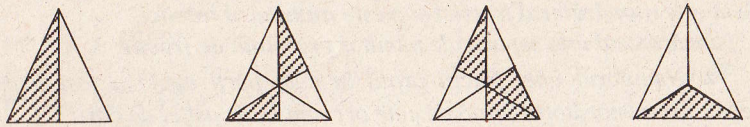


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

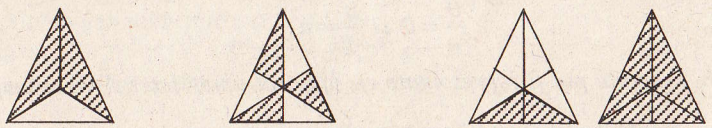


Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7

❒4. Reprezentați cu ajutorul unor desene următoarele fracții:

a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{7}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{1}{3}$;

f) $\frac{2}{7}$; g) $\frac{3}{4}$; h) $\frac{1}{2}$; i) $\frac{3}{4}$; j) $\frac{2}{3}$.

❒5. Completați spațiile libere pentru a obține un întreg în scrierile:

$\frac{\quad}{17}$; $\frac{\quad}{23}$; $\frac{7}{\quad}$; $\frac{29}{\quad}$; $\frac{\quad}{57}$; $\frac{19}{\quad}$.

❒6. Desenați segmente de dreaptă cu următoarele lungimi:

a) $\frac{1}{5}$ dm; b) $\frac{5}{2}$ cm; c) $\frac{1}{4}$ dm; d) $\frac{1}{10}$ dm.

❒7. Câte cincimi sunt în:

a) un întreg; b) trei întregi; c) cinci întregi?

❒8. Ce parte dintr-o oră reprezintă:

a) un minut; b) 10 minute; c) 45 minute;
d) 20 minute; e) 50 minute; f) 90 minute?

❒9. Ce parte dintr-o săptămână reprezintă:

a) o zi; b) trei zile; c) cinci zile; d) 28 de zile?

❒10. Ce parte dintr-un an reprezintă:

a) o lună; b) 4 luni; c) 6 luni?

❒11. Fie A = {1, 3, 5} și B = {2, 7}. Scrieți elementele mulțimii:

$$C = \{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ unde } a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

❒12. Scrieți fracțiile care au numitorul 18, iar numărătorii sunt divizorii naturali ai lui 18.

❒13. Scrieți fracțiile cu:

a) numitorul pătrat perfect de două cifre și numărătorul cu 7 mai mic decât acesta;

b) numitorul 10 și numărătorul de o cifră impară;

c) numărătorul de forma $\overline{x2}$, unde $\overline{x2} \vdots 3$ și numitorul cu 5 mai mare decât acesta.

❒14. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{1x}}{\overline{3y}}$, $x \neq y$, unde $\overline{1x}$, $\overline{3y}$ sunt prime între ele.

❒15. Determinați $x \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{18}{x}$ să fie număr natural.

❒16. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbf{N}^*$, $a \leq 3$, $b < 4$.

❒17. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{3x}}{47}$, unde $5 \mid \overline{3x}$.

❒18. Determinați toate fracțiile cu numărătorul 3 și numitorul de forma $\overline{x5}$, unde $2 < x \leq 7$.

❒19. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{2x0}}{\overline{35y}}$, unde $x \neq y$, $2 \mid \overline{2x0}$ și $3 \mid \overline{35y}$.

❒20. Determinați numerele naturale x pentru care sunt definite fracțiile:

$\frac{18}{x-3}$; $\frac{1}{x+1}$; $\frac{35}{x}$; $\frac{24}{12-x}$; $\frac{17}{2x-2}$; $\frac{57}{x(x-1)}$; $\frac{19}{(x+7)(x-2)}$.

2. Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare

✎ *O **fracție subunitară** este o fracție care are numărătorul mai mic decât numitorul; o **fracție echiunitară** este o fracție care are numărătorul egal cu numitorul; o **fracție supraunitară** este o fracție care are numărătorul mai mare decât numitorul.*

EXERCIŢII

❒**1.** Dați trei exemple de fracții:
a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

❒**2.** Fie fracțiile: $\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{17}{4}; \frac{23}{6}; \frac{3^3}{27}; \frac{2^4}{16}; \frac{1}{7}; \frac{15}{17}; \frac{37}{24}; \frac{12^0}{5}$.
a) Scrieți fracțiile subunitare.
b) Scrieți fracțiile echiunitare.
c) Scrieți fracțiile supraunitare.

❒**3.** Scrieți fracțiile subunitare cu numitorul 4.

❒**4.** Scrieți fracțiile subunitare cu numărătorul 2 și numitorul cel mult 8.

❒**5.** Fie $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 3, 7\}$. Determinați:

$M = \{\frac{a}{b}, a \in A, b \in B$ și $\frac{a}{b}$ fracție subunitară$\}$;

$N = \{\frac{a}{b}, a \in A, b \in B$ și $\frac{a}{b}$ fracție echiunitară$\}$;

$P = \{\frac{a}{b}, a \in A, b \in B$ și $\frac{a}{b}$ fracție supraunitară$\}$.

❒**6.** Determinați numărul natural x pentru care fiecare din fracțiile următoare să fie supraunitară:
a) $\frac{5}{x}$; b) $\frac{7}{x+2}$; c) $\frac{4}{x-1}$; d) $\frac{2x}{x+5}$.

❒**7.** Scrieți toate fracțiile echiunitare care au numitorul și numărătorul mai mic decât 5.

❒**8.** Fie $a, b \in \mathbf{N}^*$, $a \leq 5$, $b < 7$. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$ care să fie:
a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

❒**9.** Determinați numerele naturale x astfel încât fracția $\frac{7}{x}$ să fie:
a) supraunitară; b) echiunitară;
c) subunitară cu numitorul mai mic decât 11.

❒**10.** Se consideră fracțiile cu numărătorul 4 și numitorul mai mic sau egal cu 7. Scrieți fracțiile:
a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

❒**11.** Scrieți toate fracțiile supraunitare cu numărătorul 7.

❒**12.** Câte fracții supraunitare au numitorul 7? Scrieți trei dintre acestea.

❒**13.** Determinați numărul natural x pentru care fiecare din fracțiile următoare să fie supraunitară:
a) $\frac{5}{x-1}$; b) $\frac{9}{x+7}$; c) $\frac{12}{x^2+5}$; d) $\frac{x^2-7}{9}$; e) $\frac{5x+2}{3x+4}$.

❒**14.** Să se scrie toate fracțiile supraunitare care au numitorul 11 și numărătorul mai mic ca 14.

❒**15.** Determinați x astfel încât: $\frac{\overline{1x}+\overline{x2}}{67}$ să fie echiunitară, unde numerele $\overline{1x}$ și $\overline{x2}$ sunt scrise în baza 10.

❒**16.** Scrieți câte trei fracții care au numitorul pătrat perfect mai mic decât 50 și care să fie:
a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

❒**17.** Scrieți câte trei fracții care să aibă numărătorul cub perfect mai mic decât 70 și care să fie:
a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

❒**18.** Determinați elementele mulțimii: $A = \left\{\frac{\overline{3x}}{\overline{y2}} \middle| \overline{3x} \vdots 5 \text{ și } \overline{y2} \vdots 3\right\}$.

❒**19.** Fie fracția $\frac{2n+7}{3n+1}$, unde $n \in \mathbf{N}$. Determinați valorile naturale ale numărului n în fiecare din situațiile:
a) fracția este subunitară;
b) fracția este echiunitară;
c) fracția este supraunitară.

❒**20.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare din propozițiile:

p: $\frac{2^{93}}{3^{62}}$ este fracție echiunitară;

q: $\frac{3^{201}}{2^{301}}$ este fracție subunitară;

r: $\frac{8^{15}}{32^{9}}$ este fracție supraunitară.

❒**21.** Fie fracția $\frac{1980-1979+1988-1987+...+4-3+2-1}{1+2+3+...+n}$, $n \in \mathbf{N}$. Determinați n astfel încât fracția să fie echiunitară.

3. Reprezentări echivalente ale fracțiilor. Fracții egale

✎ *Aceeași parte dintr-un întreg poate fi ilustrată prin* ***reprezentări echivalente****. De exemplu, reprezentările de mai jos sunt echivalente deoarece ilustrează aceeași parte dintr-un întreg.*

Prima reprezentare ilustrează fracția $\frac{2}{3}$*, iar a doua ilustrează fracția* $\frac{4}{6}$.

✎ ***Două fracții sunt egale dacă reprezentările lor sunt echivalente.***

Deci, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.

Pentru a stabili dacă două fracții $\frac{a}{b}$ *și* $\frac{c}{d}$ *sunt egale calculăm* $a \cdot d$ *și* $b \cdot c$.

- *dacă* $a \cdot d = b \cdot c$*, atunci fracțiile sunt egale, adică:*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$

- *dacă* $a \cdot d \neq b \cdot c$*, atunci fracțiile nu sunt egale, deci:*

$$\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}.$$

EXERCIȚII

❒**1.** Stabiliți dacă următoarele egalități de fracții sunt adevărate:

$$\frac{4}{2}=\frac{6}{3};\ \frac{5}{7}=\frac{15}{21};\ \frac{1}{12}=\frac{5}{30};\ \frac{3}{17}=\frac{6}{34};\ \frac{11}{4}=\frac{33}{22}.$$

❒**2.** Scrieți câte trei fracții egale cu fracțiile:

a) $\frac{12}{28}$; b) $\frac{125}{15}$; c) $\frac{2^3}{8}$; d) $\frac{1}{3}$.

❒**3.** Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a) $\frac{3}{7}=\frac{9}{...}$; b) $\frac{5}{4}=\frac{...}{16}$; c) $\frac{1}{...}=\frac{3}{27}$; d) $\frac{...}{4}=\frac{7}{7}$.

❒**4.** Determinați fracția $\frac{a}{b}$ știind că este egală cu fracția $\frac{2}{3}$ și $a + b = 10$.

❒**5.** Determinați fracția $\frac{a}{b}$ știind că este egală cu fracția $\frac{3}{4}$ și $b - a = 11$.

❒**6.** Determinați fracția $\frac{a}{b}$ știind că este egală cu fracția $\frac{7}{5}$ și $a \cdot b = 1260$.

❒**7.** Determinați x astfel încât $\frac{\overline{x7}}{\overline{1x}}=\frac{9}{4}$.

❒**8.** Scrieți toate fracțiile cu numitorul divizor al lui 66 echivalente cu fracția $\frac{1}{2}$.

❒**9.** Scrieți toate fracțiile cu numărătorul mai mic decât 15 echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$.

❒**10.** Scrieți câte trei fracții echivalente cu fracțiile:

a) $\frac{101_{(2)}}{1101_{(2)}}$; b) $\frac{134_{(5)}}{2301_{(4)}}$; c) $\frac{11_{(2)}}{1013_{(4)}}$.

❒**11.** Scrieți fracțiile de forma $\frac{\overline{xy}}{zt}$ care sunt egale cu fracțiile:

a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{11}{37}$; c) $\frac{41}{23}$; d) $\frac{19}{41}$; e) $\frac{12}{5}$.

❒**12.** Determinați x astfel încât fiecare din următoarele fracții să fie egală cu fracția $\frac{3}{7}$:

a) $\frac{x}{28}$; b) $\frac{45}{x}$; c) $\frac{2x+1}{21}$; d) $\frac{51}{38+x^2}$.

❒**13.** Dacă $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ rezultă a = 1 și b = 2?

❒**14.** Determinați x astfel încât 28a = 35b și $\frac{a}{b}=\frac{x}{36}$.

❒**15.** Dacă a, b ∈ $\mathbf{N}^*$ și $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$, arătați că 51a = 34b.

❒**16.** Fie a, b, c, d, x, y ∈ $\mathbf{N}^*$ cu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ și c · y = d · x. Stabiliți dacă a · y = b · x.

❒**17.** Fie a, b, c, d, x, y ∈ $\mathbf{N}^*$ cu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ și a · y = b · x. Arătați că $\frac{a}{c+x}=\frac{b}{d+y}$.

❒**18.** Determinați numerele naturale x și y astfel încât fracțiile $\frac{2}{x}$ și $\frac{y+1}{3}$ să fie egale.

❒**19.** Aflați numărul natural x care verifică egalitatea: $\frac{15}{x^2+4x}=\frac{5}{4}$.

❒**20.** Determinați elementele mulțimilor:

a) $A=\{x \mid \frac{\overline{1a}}{x}=\frac{1}{2}$ și $\overline{1a}$ este număr prim$\}$;

b) $A=\{x \mid x=\frac{119}{\overline{1a4}}, \overline{1a4} \vdots 6\}$.

4. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Șir de fracții egale. Număr rațional pozitiv

✎ *A* ***amplifica*** *o fracție* $\frac{a}{b}$ *cu un număr natural nenul n înseamnă a înmulți și numărătorul și numitorul fracției cu n. Prin amplificare se obține o fracție egală cu cea dată. Notăm:*

$$\frac{a}{b}\overset{n)}{=}\frac{n\cdot a}{n\cdot b}.$$

✎ *A* ***simplifica*** *o fracție* $\frac{a}{b}$ *cu un număr natural nenul n înseamnă a împărți și numărătorul și numitorul fracției la n. Prin simplificare se obține o fracție egală cu cea dată. Notăm:*

$$\frac{a}{b}\overset{(n}{=}\frac{a:n}{b:n}.$$

✎ *Un șir de fracții egale reprezintă același număr deoarece reprezentările lor sunt echivalente. Acest număr se numește* ***număr rațional.***

Oricărei fracții i se asociază un număr rațional. Numerele raționale se notează prin fracții care le reprezintă. Oricare două fracții egale reprezintă același număr rațional.

EXERCIȚII

☑**1.** Să se amplifice cu 3 următoarele fracții:

$$\frac{1}{2};\ \frac{5}{7};\ \frac{a}{b};\ \frac{2x}{5y};\ \frac{x+2}{y+1};\ \frac{a+b}{x+y}.$$

☑**2.** Să se amplifice cu numărul natural n nenul următoarele fracții:

$$\frac{3}{4};\ \frac{7}{2};\ \frac{a}{b};\ \frac{3a}{7b};\ \frac{a+1}{b+3};\ \frac{a+b}{x+y}.$$

☑**3.** Aflați cu ce numere trebuie amplificată fiecare din următoarele fracții astfel încât să obținem de fiecare dată fracții cu numitorul 48:

$$\frac{1}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{7}{6};\ \frac{19}{12};\ \frac{11}{16};\ \frac{17}{24}.$$

4. Aflați cu ce numere trebuie amplificată fiecare din următoarele fracții astfel încât să obținem de fiecare dată fracții cu numărătorul 32:

$$\frac{4}{5};\ \frac{2}{17};\ \frac{8}{7};\ \frac{16}{23};\ \frac{1}{10}.$$

5. Aflați numerele naturale x și y astfel încât fiecare din următoarele egalități să fie adevărată:

a) $\frac{3}{5}\overset{y)}{=}\frac{x}{10}$; b) $\frac{7}{x}\overset{y)}{=}\frac{21}{15}$; c) $\frac{x+2}{x+7}\overset{y)}{=}\frac{3x+6}{48}$.

6. Aflați numerele naturale x și y astfel încât următoarele fracții să formeze un șir de fracții echivalente: $\frac{2}{3};\ \frac{x+1}{6}$ și $\frac{10}{2y+1}$.

7. Să se simplifice prin 5 următoarele fracții:

$$\frac{10}{15};\ \frac{15}{45};\ \frac{5a}{10b};\ \frac{10a+10b}{25x+25y};\ \frac{2^2\cdot 5}{3\cdot 5}.$$

8. Să se simplifice fracțiile, obținând fracții ireductibile:

$$\frac{20}{30};\ \frac{250}{350};\ \frac{2\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 11};\ \frac{2^3}{2^5};\ \frac{2^7\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 11};\ \frac{5200}{18200};\ \frac{1716}{4290};\ \frac{72a}{108a};\ \frac{34a+34b}{51a+51b}$$

9. Aflați numerele naturale x și y astfel încât fiecare din următoarele egalități să fie adevărată:

a) $\frac{6}{8}\overset{(x}{=}\frac{3}{y}$; b) $\frac{x+1}{15}\overset{(y}{=}\frac{2}{3}$; c) $\frac{7x+21}{x+2}\overset{(y}{=}\frac{x+3}{5}$.

10. Aflați numerele naturale *x* și *y* astfel încât următoarele fracții să formeze un șir de fracții echivalente: $\frac{24}{36};\ \frac{12}{x+2}$ și $\frac{y+1}{6}$

11. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{375\,375}{871\,871}$; b) $\frac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}}$; c) $\frac{\overline{ab0ab}}{17017}$.

12. Din mulțimea fracțiilor de forma $\frac{\overline{1a7b}}{\overline{c51d}}$, care se simplifică prin 36 aflați pe cea mai mică și pe cea mai mare.

13. Arătați că fracția $\frac{x^2+x}{2x+4}$ este reductibilă oricare ar fi $x\in\mathbf{N}^*$.

14. Arătați că fracția $\frac{ab(a+b)}{x^2-x+6}$ este reductibilă oricare ar fi a, b, $x\in\mathbf{N}^*$.

15. Arătați că fracția $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

16. Arătați că fracția $\frac{n}{3n+1}$ este ireductibilă oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

17. Arătați că fracția $\frac{7n+10}{5n+7}$ este ireductibilă oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

18. Arătați că fracția $\frac{4n+3}{6n+4}$ este ireductibilă oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

19. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n+4}{n+6}$ este reductibilă.

20. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{4n+3}{7n+6}$ este reductibilă.

21. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{3n+7}{11n+24}$ este reductibilă.

22. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{2n+3}{5n+2}$ este reductibilă.

23. Fie a, b, c, $d\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $a\cdot d=b\cdot c$. Arătați că:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c-a}{d-b}.$$

5. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

✎ *Două fracții* $\frac{a}{b}$ *și* $\frac{c}{d}$ *pot fi aduse la un numitor comun dacă amplificăm prima fracție cu d, iar a doua fracție cu b. Obținem astfel fracțiile:* $\frac{d\cdot a}{d\cdot b}$ *și* $\frac{b\cdot c}{b\cdot d}$, *care au numitorul comun.*

EXERCIȚII

❒**1.** Aduceți fracțiile următoare la cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$; b) $\frac{3}{7}, \frac{4}{15}$; c) $\frac{4}{5}, \frac{29}{35}$; d) $\frac{3}{4}, \frac{12}{27}$;

e) $\frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{36}, \frac{7}{72}, \frac{5}{24}$; g) $\frac{11}{12}, \frac{4}{9}, \frac{17}{36}$; h) $\frac{2}{57}, \frac{3}{95}, \frac{1}{19}$.

❒**2.** Scrieți câte trei numitori comuni pentru fracțiile:

a) $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$; b) $\frac{1}{4}, \frac{3}{11}$; c) $\frac{2}{3}, \frac{9}{17}$; d) $\frac{3}{27}, \frac{4}{15}$; e) $\frac{10}{11}, \frac{11}{12}$.

❒**3.** Cu trebuie amplificată fiecare fracție pentru a obține numitorul 210:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{6}, \frac{11}{10}, \frac{13}{15}, \frac{5}{21}, \frac{12}{35}, \frac{17}{7}.$$

❒**4.** Aduceți fracțiile la același numitor prin simplificare:

a) $\frac{5}{12}, \frac{36}{432}$; b) $\frac{75}{425}, \frac{15}{255}$; c) $\frac{64}{288}, \frac{105}{135}$; d) $\frac{720}{7920}, \frac{240}{990}$.

❒**5.** Aduceți la același numitor fracțiile:

a) $\frac{1}{98}, \frac{7}{168}, \frac{11}{441}$; b) $\frac{1}{60}, \frac{13}{90}, \frac{7}{30}$; c) $\frac{1}{25}, \frac{4}{75}, \frac{11}{300}$;

d) $\frac{2x}{3y}, \frac{1}{6y^2}, \frac{4}{12y^2}$, $x, y \in \mathbf{N}^*$; e) $\frac{3}{xy}, \frac{4}{yz^2}, \frac{1}{x^2z}$.

❒**6.** Calculați cel mai mic numitor comun al fracțiilor:

a) $\frac{7}{45}, \frac{1}{90}, \frac{11}{180}$; b) $\frac{5}{2^3\cdot 5}, \frac{1}{2\cdot 5^2}, \frac{7}{2^2\cdot 5^2}$; c) $\frac{1}{2^2\cdot 7}, \frac{1}{2\cdot 7^2}, \frac{1}{2^2\cdot 7^2}$.

❒**7.** Aduceți la același numitor fracțiile:

a) $\frac{10_{(3)}}{111_{(2)}}, \frac{21_{(4)}}{10_{(2)}}$; b) $\frac{14_{(5)}}{21_{(3)}}, \frac{13_{(4)}}{12_{(3)}}$; c) $\frac{135_{(7)}}{120_{(4)}}, \frac{310_{(6)}}{44_{(5)}}$.

❒**8.** Determinați fracțiile echivalente cu cele ce urmează, având cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{1}{3a}, \frac{2}{3a^2}$; b) $\frac{1}{2ab}, \frac{3}{18a^2b^2}$; c) $\frac{7}{11a}, \frac{1}{33b}$;

d) $\frac{|-3|}{a^2b}, \frac{|-5|}{ab^2}$; e) $\frac{|-1|}{21a^2}, \frac{|-4|}{35ab^2}$; f) $\frac{1}{2a}, \frac{1}{3b}, \frac{1}{5c}$;

g) $\frac{1}{2\cdot 3a\cdot b^2}, \frac{1}{2^2\cdot 3a^2}, \frac{1}{4b^2}$.

❒**9.** Cel mai mic numitor comun a două fracții este 225. Care din următoarele numere pot fi numitori pentru aceste fracții:

90, |–25|, 15, 17, 32, |–3|, |–50|, 150, |–75|.

❒**10.** Două fracții au numitorul comun 900. Alegeți din numerele care urmează pe acelea care nu pot fi cel mai mic numitor comun:

|–3|, 20, |–12|, |–140|, 180, 324, |–150|, 235, 144.

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1

❒1. Calculați:
a) $10 - 3^2 \cdot \{2^3 - 7 \cdot [6 - 5 \cdot (2^2 - 3)]\}$;
b) $98 \cdot 87 - 87 \cdot 3 + 95 \cdot 13$.

❒2. Suma a două numere naturale este 191. Să se afle numerele știind că împărțind pe cel mare la cel mic obținem câtul 3 și restul tot 3.

❒3. Aflați numerele naturale $\overline{xy}$ (în baza 10) care sunt cu 54 mai mari decât răsturnatele lor.

❒4. Să se afle x din egalitatea: $10 \cdot \{475 + 2 \cdot [45 + 2(x - 298)]\} = 9730$.

TESTUL 2

❒1. Aflați x din egalitățile:
a) $(2 + 3^2 \cdot 5) : 47 = 3^2 - 2^x$; b) $4^{1+2+3+...+x} = 8^{14}$.

❒2. Să se afle trei numere naturale știind că suma lor este 347, numărul al doilea este cu 5 mai mare decât primul și de două ori mai mic decât al treilea.

❒3. Care număr, împărțit la 499, dă câtul egal cu restul unul din numerele 501, 602, 490?

❒4. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2^x \leq 8\}$ și $B = \{y \mid y = 2x + 1, x \in A\}$. Să se afle $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

TESTUL 3

❒1. Aflați elementele mulțimilor A și B știind că:
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$ și $B - A \neq \emptyset$.

❒2. Să se afle $x \in \mathbf{N}$ din egalitatea:
$[(x - 416 : 4 + 2) \cdot 5 + 3] \cdot 2 + 14 = 2000$.

❒3. Calculați: $54 : 3^2 + 2 \cdot [(3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 4]$.

❒4. Media aritmetică a trei numere naturale este 20. Aflați numerele știind că primele două au media aritmetică 19, iar ultimele două au media aritmetică 21.

TESTUL 4

❒1. a) Se dau: $a = 7$, $b + c = 9$ și $b - c = 5$. Fără a se afla numerele b și c calculați: $ab + ac$, $ab - ac$ și ab.
b) Calculați: $(3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}) : 40$, $n \in \mathbf{N}$.

❒2. Aflați două numere naturale știind că primul este de trei ori mai mic decât al doilea, iar suma dintre de 4 ori primul și dublul celui de-al doilea este 560.

❒3. Cercetați dacă există 7 numere naturale consecutive a căror sumă să fie 2000.

❒4. Aflați numerele naturale care împărțite la 28 dau restul egal cu cubul câtului.

TESTUL 5

❒1. Să se afle $x \in \mathbf{N}$ din următoarele egalități:
a) $2^3 - 7 \cdot \{6 - 5 \cdot [2^2 - 3(2^1 - x)]\} = 1$;
b) $9^5 : 27^3 + 3^x = 30$.

❒2. Aflați suma numerelor naturale care împărțite la 7 dau câtul 2000.

❒3. Cercetați dacă numărul: $a = 2000 + 2000 \cdot 2001 + 2002 \cdot 2$ este pătrat perfect.

❒4. Pentru o problemă rezolvată corect se primesc 5 puncte, iar pentru una rezolvată incorect se primește o penalizare de 3 puncte. După abordarea a 24 de probleme un elev are zero puncte. Câte probleme a rezolvat corect elevul?

TESTUL 6

❒1. Calculați:
a) $(49 \cdot 1001 + 7 \cdot 11 \cdot 13) : (2 \cdot 5^2 \cdot 91)$;
b) $2^3 + 4^5 : 2^8 \cdot 2 + 16^2 : 2^5 + (2^5)^2 : 2^7 - 2^2 \cdot 2^3$.

❒2. Aflați suma tuturor numerelor naturale $\overline{12a}$ (în baza 10) divizibile cu 2.

❒3. Dacă se așază câte 2 elevi într-o bancă, un elev rămâne fără loc, iar dacă se așază câte trei elevi într-o bancă rămân patru bănci libere. Câți elevi și câte bănci sunt?

❒4. Aflați valoarea de adevăr a propoziției: „Diferența dintre un număr natural de trei cifre, distincte, și răsturnatul său nu este pătrat perfect".

TESTUL 7

❒1. Dacă $a + 2b = 8$ și $3b + 4c = 20$ arătați că $3a + 12\ b + 8c$ este pătrat perfect.

❒2. Arătați că numărul $a = 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$ este divizibil cu 10 și cu 3, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

❒3. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $a = 3^{22}$, $b = 4^{15}$, $c = 2^{33}$.

❒4. Aflați perechile de numere naturale cu suma 100 și câtul împărțirii celui mai mare la cel mai mic 4.

TESTUL 8

❒1. a) Cercetați dacă: $\dfrac{\overline{xx9} + \overline{8x} + 7}{\overline{x9x} + \overline{x6}} \in \mathbf{N}$, unde x este cifră în baza 10.

b) Calculați $1234 - (1232 \cdot 1233 + 1233) : 1233^2$.

❒2. Mulțimile A și B îndeplinesc simultan condițiile: $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A - B = \{2, 5\}$ și $B - A = \{6\}$. Aflați valoarea de adevăr a propoziției: „Suma elementelor mulțimii A adunată cu suma elementelor mulțimii B este cubul unui număr natural."

❒3. Într-o clasă sunt de două ori mai multe fete decât băieți. Pot fi 27 de elevi în clasă? Dar 25?

❒4. Să se arate că: $\dfrac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}}{23} \in \mathbf{N}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

TESTUL 9

❒1. Stabiliți regula de formare a următoarelor șiruri de numere naturale și completați fiecare șir cu încă trei numere:

a) 2; 7; 12; 17; 22;

b) 1; 7; 25; 79.

❒2. Calculați y din egalitatea: $y + 10a + 35b = 239$ știind că $2a + 7b = 28$.

❒3. Să se afle cea mai mare și cea mai mică fracție ordinară de forma $\dfrac{\overline{3a}}{\overline{53b}}$ știind că $\overline{3a}$ este număr par, iar $\overline{53b}$ este număr divizibil cu 5.

❒4. O sumă de bani a fost împărțită în două părți: prima parte reprezintă $\frac{1}{2}$ din întreaga sumă, mai puțin 128 000 lei, iar a doua parte este cât $\frac{2}{5}$ din rest și încă 756 000 lei. Să se afle suma de bani.

TESTUL 10

❒1. Dacă $a = 2^3 + 5$, $b = (3^2)^3 - 200$ și $c = 4^8 : 32^2$, calculați $10a + b - 8c$.

❒2. Să se afle două numere naturale știind că împărțind numărul mare la numărul mic obținem câtul 4 și restul 32, iar diferența lor este 185.

❒3. Să se determine cifrele a, b, c astfel încât $\overline{abc}_7 = \overline{bca}_6 + \overline{bc}_8 - b$, unde 7, 6 și 8 reprezintă bazele de numerație.

❒4. Un grup de 30 de băieți și fete au cules 186 kg fructe de pădure. Știind că fetele au cules, fiecare, câte 8 kg de fructe și băieții au cules, fiecare, câte 5 kg de fructe, să se afle câți băieți și câte fete sunt în grup.

TESTUL 11

❒1. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ din egalitatea: $3^{2n+1} + 9^{n+1} = 972$.

❒2. Produsul a două numere naturale este 168. Dacă primul număr se mărește cu 6, iar al doilea se micșorează de 4 ori, atunci produsul rămâne neschimbat.

❒3. Suma a cinci numere naturale impare consecutive este 1275. Să se afle numerele.

❒4. În trei lăzi sunt 150 mere. Dacă transferăm 15 mere din lada a doua în prima, atunci în cele două lăzi va fi același număr de mere, iar dacă transferăm din lada a doua în a treia 20 de mere, atunci în lada a treia este un număr de mere dublu față de numărul merelor din a doua ladă. Câte mere sunt în fiecare ladă?

TESTUL 12

❒1. Comparați numerele: $a = 2^{487} - 2^{486} - 2^{485}$ și $b = 6^{194}$.

❒2. Să se determine numărul natural de forma $\overline{ab}$ (în baza 10) pentru care: $\overline{ab} = 5a + 3b$.

❒3. Să se afle trei numere naturale știind că produsul primelor două este 135, produsul ultimelor două este 405, iar al treilea cu 10 mai mare decât primul.

❒4. Suma a trei numere naturale este 222. Știind că primul este mai mare decât al doilea cu 10, iar al treilea împărțit la al doilea dă câtul 3 și restul 12, aflați cele trei numere.

TESTUL 13

❒1. Calculați:
$\{[20 + (28 \cdot 6 - 140) : 2^2] \cdot 5 + 375 : 5^2\} : [213 \cdot 2^2 - (2^5 : 4^2 + 2^3) \cdot 80 - 2]$.

❒2. Se consideră propozițiile:
p(x): $3x + 5 \leq 20$, $x \in \mathbf{N}$ și
q(x): $5x - 9 > 15$, $x \in \mathbf{N}$.
Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) Există $x \in \mathbf{N}$ pentru care p(x) este adevărată.
b) Pentru oricare $x \in \mathbf{N}$, propoziția q(x) este adevărată.
c) Negația propoziției p(x) este $3x + 5 > 20$.
d) Există cel mult trei valori pentru care $p(x) \vee q(x)$ este adevărată.
e) Dacă $x = 5$, atunci propoziția $p(x) \wedge q(x)$ este adevărată.

❒3. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât să existe egalitatea:
$$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^n - (3^2)^{17} = 8 \cdot 9^{17}.$$

❒4. Suma a două numere naturale este egală cu suma divizorilor numărului cuprins între 20 și 26 care are cel mai mare număr de divizori. Știind că numărul mare este de trei ori mai mare decât celălalt, să se afle numerele.

TESTUL 14

❒1. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 10, x = 2k, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{y \in \mathbf{N} \mid 6 < y \leq 13, y = 2t + 1, t \in \mathbf{N}\}$. Determinați $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$.

❒2. Să se calculeze suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr natural care împărțite la 27 dau câtul 56.

❒3. În ce bază de numerație avem: $\overline{24}_x + \overline{35}_x = 39_{10}$?

❒4. Compuneți două probleme în care să folosiți următoarele operații:
$$\{[(500\,000 : 2) \cdot 3] : 2\} \cdot 5.$$

TESTUL 15

❒1. Să se determine perechile de cifre (x; y) pentru care $\overline{3x} + \overline{4y}$ (în baza 10) este pătrat perfect.

❒2. Comparați numerele naturale: $x = \overline{635a19}$ și $y = \overline{6a3471}$.

❒3. Dacă $a + b = 246$ și $c = 28$, calculați:
1) $ac + bc$;
2) $7a + 5b + 2(b - c)$.

❒4. Să se afle trei numere naturale știind că suma lor este 574 și că împărțind pe primul la al doilea obținem câtul zero și restul 50, iar dacă împărțim al treilea număr la al doilea obținem câtul 3 și restul 20.

TESTUL 16

❒1. Fie șirul de numere naturale format după regula $3n + 4$, $n \in \mathbf{N}$. Scrieți primii 15 termeni ai șirului și calculați suma lor.

❒2. La o împărțire de două numere naturale câtul a fost 23 și restul 15. Știind că suma dintre deîmpărțit și împărțitor este 591, să se reconstituie împărțirea.

❒3. Să se determine cifrele nenule a şi b din baza 10 astfel încât numărul natural: $n = \overline{aaa} - \overline{abb} + 3(b-a)$ să fie pătrat perfect.

❒4. Să se determine tripletele (x, y, z) de numere naturale care verifică relaţia: $(x-1)\cdot(y+1)\cdot(z-4) = 15$.

TESTUL 17

❒1. Să se calculeze valoarea expresiei: $E = x^2 + (xy - yz) : 1000$ ştiind că $x^4 = 9^2$, $y = [2^{10}\cdot(8\cdot 25)^3] : [(2^4)^4\cdot 5^2]$ şi $x - z = 2$.

❒2. Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{xyz}$:5 ştiind că $x^2 = 9$ şi să se afle suma lor.

❒3. Aflaţi elementele mulţimii: $A = \left\{x\in \mathbf{N}\,\middle|\,\frac{8x-1}{5x+23} \text{ este subunitară}\right\}$.

❒4. Să se determine numărul natural cu proprietatea că dacă se împarte la 17 (fără rest), se obţine acelaşi rezultat ca atunci când el se scade din 1080.

TESTUL 18

❒1. Folosind comutativitatea şi asociativitatea adunării calculaţi (rapid):

a) $\frac{31}{50}+\frac{12}{50}+\frac{19}{50}+\frac{38}{50}$; b) $\frac{5}{11}+\frac{9}{22}+\frac{6}{11}+\frac{2}{22}$.

❒2. Stabiliţi dacă fracţia $\frac{7^{160}}{13^{120}}$ este supraunitară.

❒3. Aflaţi numerele naturale x pentru care $\frac{5x+12}{x+3}\in \mathbf{N}$.

❒4. Găsiţi o fracţie echivalentă cu fracţia $\frac{13}{5}$ ştiind că suma dintre numărător şi numitor este 162.

TESTUL 19

❒1. Simplificaţi următoarele fracţii:

a) $\frac{25}{35}$; b) $\frac{100000_2}{110000_2}$; c) $\frac{3x-9}{4x-12}$, $x\neq 3$; d) $\frac{10^4}{2^3}$.

❒2. Efectuaţi: $\frac{17}{5}-\frac{13}{10}-\frac{7}{15}-\frac{11}{30}$.

❒3. Se dau mulţimile: $A=\left\{n\in \mathbf{N}\,\middle|\,\frac{20}{n+2}\in \mathbf{N}\right\}$ şi $B=\left\{n\in \mathbf{N}\,\middle|\,\frac{55}{n+3}\in \mathbf{N}\right\}$.

Să se determine $A\cup B$, $A\cap B$, $B - A$.

❒4. Să se afle trei numere naturale care verifică simultan condiţiile:
a) suma ultimelor două numere este 382;
b) produsul dintre primul număr şi ultimul număr este 6840;
c) produsul primelor două numere este 10350.

TESTUL 20

❒1. Determinaţi valorile $n\in \mathbf{N}$ în cazurile:
a) $n + 2 \mid 24$;
b) $2n + 1 \mid 27$.

❒2. Calculaţi:
a) $(6\cdot 11^{20} + 5\cdot 11^{20}) : 11^{20}$;
b) $10^4\cdot 92 + 10^4\cdot 4 + 40\,000$;
c) $13^{10} - (14\cdot 13^{15} - 13^{15}) : 13^6$.

❒3. Ce sumă a avut un elev, dacă după ce a cheltuit $\frac{1}{5}$ din sumă, apoi $\frac{2}{5}$ din rest şi încă 200 000 lei i-au mai rămas 700 000 lei?

❒4. Aflaţi numerele naturale a, b, c care verifică simultan relaţiile:
$a\cdot b = 6$;
$b\cdot c = 15$;
$a\cdot c = 10$.

TESTE PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADELOR ȘCOLARE

TESTUL 0.1

❒**1.** Arătați că numărul $A = 9^{2k} - 7^{4k}$ este divizibil cu 10 $(\forall)$ $k \in \mathbf{N}$.

❒**2.** Cercetați dacă numărul $B = 5 \cdot n + 7$ poate fi pătrat perfect $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$.

❒**3.** Arătați că numărul 23 divide $4a + 7b$ dacă și numai dacă 23 divide $5a + 3b$, $a, b \in \mathbf{N}$.

❒**4.** Suma a 60 de numere naturale este 1829. Arătați că există două dintre ele a căror diferență se divide cu orice număr natural.

TESTUL 0.2

❒**1.** Să se determine:

a) numărul natural n din egalitatea: $2^{2002} + 4^{1001} = 2^n$;

b) toate numerele naturale m pentru care $\left(2^{5^2}\right)^m$ este divizor impropriu al numărului $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{50}$.

❒**2.** La un concurs cei 24 de elevi ai unei clase au obținut 145 de puncte. O grupă de elevi din clasă a obținut câte 13 puncte fiecare, alta câte 5 puncte fiecare, iar alta 4 puncte fiecare. Câți elevi erau în fiecare grupă?

❒**3.** Să se arate că:

a) Dacă suma dintre un număr natural și răsturnatul său este 1110, atunci în reprezentarea numărului în baza zece sunt necesare doar trei cifre, cifra zecilor fiind 5.

b) Dacă A, B și C sunt mulțimi și dacă $A - B = B \cup C$, atunci $A = B$.

O. M. – faza locală – Bacău, 2002

TESTUL 0.3

❒**1.** Câtul și restul împărțirii numerelor naturale a și b sunt 19 respectiv 99. Dacă $a - b < 1917$, aflați numerele a și b.

C.M. „Dan Barbilian", Curtea de Argeș, 1999
Virginia Tică, Vasile Tică, prof., Câmpulung

❒**2.** Aflați numerele nenule a, b, c știind că mulțimile $A = \{36, 110, a^2\}$ și $B = \{b^2 + b, 3a + 2b + 1, c^2\}$ sunt egale.

C.M. „Dan Barbilian", Curtea de Argeș, 1999
Sorin Peligrad, prof., Pitești

❒**3.** Se dau mulțimile: $A = \{12; 2n + 1\}$ și $B = \{n^2 + n, 2n - 1\}$. Să se afle $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $A \cup B$ să aibă trei elemente.

❒**4.** Numărul 5^{n+1} se poate scrie ca sumă de cinci numere consecutive $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$? Justificați răspunsul.

TESTUL 0.4

❒**1.** Să se afle cifrele a, b, c (în baza 10) știind că $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$.

❒**2.** Fie x și y două numere naturale care verifică egalitatea $3x + 5y = 1999$. Arătați că $399 < x + y < 667$.

O.M. – Etapa județeană, Argeș, 1999
Sorin Peligrad, prof., Pitești

❒**3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $6y - x = x \cdot y$.

❒**4.** Se dau numerele: $a = 2^{m+3} - 2^{m+2} + 2^{m+1} - 2^m$ și $b = 3^{n+2} - 3^{n+1} - 3^n$, $m, n \in \mathbf{N}$.

a) Să se arate că numerele a și b sunt divizibile cu 5, $(\forall)m, n \in \mathbf{N}$.

b) Dacă $m = 155$ și $n = 93$, comparați numerele a și b.

TESTUL 0.5

❒**1.** Să se afle $n \in \mathbf{N}$ astfel încât: $2^{2001} \cdot 3^{1999} + 2^{2000} \cdot 3^{1999} - 6^n = 0$.

❒**2.** Dacă $x = a \cdot m + a \cdot n$, $y = b \cdot m + b \cdot n$, $a + b = 5$ și $m + n = 6$, unde a, b, $m, n \in \mathbf{N}$, arătați că $x + y$ este divizibil cu 10.

❒3. Să se arate că suma: $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1)$ este pătrat perfect, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

❒4. Să se rezolve ecuația: $x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + 20) = 7x + 350$.

TESTUL O.6

❒1. Să se afle numerele naturale n astfel încât $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 3$ să fie pătrat perfect.

❒2. Să se afle numărul $n \in \mathbf{N}$ pentru care: $4^{1000} - 2^{1999} - 64^{333} = 8^n$.

❒3. Să se afle numerele $x, y, z \in \mathbf{N}$ astfel încât:
$3^x \cdot 3^y = 3^5$; $3^y \cdot 3^z = 3^7$; $3^x \cdot 3^z = 3^6$.

❒4. Arătați că numărul: $a = 2^{76} + 2^{77} + \ldots + 2^{102}$ nu poate fi pătrat perfect.

O.M. – Faza locală, Argeș, 1997

TESTUL O.7

❒1. Într-o clasă cu 35 de elevi numărul băieților este cu 2 mai mare decât jumătate din numărul fetelor. Să se arate că cel puțin 4 fete sunt născute în aceeași zi a săptămânii și cel puțin doi băieți sunt născuți în aceeași lună a anului.

O.M. – Faza locală, Argeș, 1989
Petre Ruja, prof., Pitești

❒2. Să se afle cinci numere naturale consecutive știind că suma lor S verifică proprietatea: $510 < S < 520$.

❒3. Peste 3 ani vârsta tatălui va fi de șase ori vârsta fiului, iar peste 23 de ani vârsta tatălui va fi de două ori vârsta fiului. Aflați vârsta tatălui și vârsta fiului.

❒4. Să se afle numărul $\overline{ab}_{10}$ știind că $\overline{ab}_{10} + \overline{ba}_{10}$ este pătrat perfect și $\overline{ab}_{10} - \overline{ba}_{10}$ este cub perfect.

TESTUL O.8

❒1. Aflați suma tuturor numerelor naturale cuprinse între 1000 și 2000 care împărțite la 49 dau câtul și restul numere egale.

❒2. Să se afle numărul $n \in \mathbf{N}$ din egalitatea:
$$n^2 + n + 1000^2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1999.$$

❒3. Care este restul împărțirii numărului $\overline{ab5} + \overline{ab} + \overline{a2b}$ la 6?

❒4. Se dau numerele $a, b \in \mathbf{N}$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. Arătați că $x = \frac{84a - b}{2b - 3a}$ este cub perfect.

TESTUL O.9

❒1. Numerele naturale a, b, c verifică relația: $2a + 5b = 12c$. Aflați restul împărțirii numărului $b(6c - a)$ la 10.

❒2. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{1+2+3+\ldots+500}{4+8+12+\ldots+2000}$ arătați că $x = \frac{5b - 2a}{10a - 2b}$ este pătrat perfect.

❒3. Cercetați dacă există numerele naturale m și n astfel încât
$$(m - n) \cdot (m + n + 1) = 1999.$$

TESTUL O.10

❒1. Cercetați dacă numărul $a = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2001}$ este multiplu al numărului 399.

❒2. Aflați elementele mulțimii $A = \left\{ x \,\middle|\, \frac{\overline{3xx}}{x+3} \in \mathbf{N}, x \text{ este cifră în baza zece} \right\}$.

❒3. Dacă se distribuie câte 3 bomboane fiecărui elev, rămân 7 bomboane. Dacă se distribuie câte 4 bomboane fiecărui elev, trei elevi nu primesc nici o bomboană, iar un elev primește doar o bomboană. Câți elevi și câte bomboane sunt?

❒4. Cercetați dacă: $\frac{12^n - 2^{n+1} \cdot 3 + 3^{n+1} \cdot 2^n - 18}{10} \in \mathbf{N}, (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

TESTUL 0.11

❒1. Să se afle $x \in \mathbf{N}$ astfel încât: $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2000} = 4^{1000} \cdot x - 8^{667} - 2$.

❒2. Care sunt numerele $\overline{ab}$, scrise în baza 10, astfel încât $\frac{\overline{ab}}{3a+b} \in \mathbf{N}$?

❒3. Aflați numerele $n \in \mathbf{N}$ pentru care: $3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+2} + 3^n \leq 2000$.

❒4. Aflați numerele naturale x și y care verifică egalitatea: $3x - 2y = x \cdot y$.

TESTUL 0.12

❒1. Să se determine cea mai mică valoare a lui $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracția:

$$\frac{9^{3n+2} - 27^{2n+1} - 29 \cdot 3^{6n}}{3^{2000} - 3^{1999} - 3^{1998}} \in \mathbf{N}.$$

❒2. Împărțind un număr natural a la 63 obținem restul 34. Ce rest obținem dacă împărțim numărul a la 21?

❒3. Numerele 563 și 721 împărțite la același număr natural dau același rest, iar câturile sunt numere impare consecutive. Să afle împărțitorul, câturile și restul.

❒4. Câtul împărțirii numerelor naturale a și b este 5, iar restul este 6. Arătați că $a + b \geq 48$. Pentru care numere a și b avem egalitate?

TESTUL 0.13

❒1. Aflați $a, b \in \mathbf{N}$ știind că: $2^a \cdot 3^b + 2^a + 3^b = 139$.

❒2. Aflați cifrele x, y, z știind că: $\frac{\overline{xy}}{75} = \frac{1}{2x+y-z}$.

❒3. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: 2^{376}; 17^{94}; 3^{230}.

❒4. a) Arătați că numărul: $a = 19 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 19 \cdot 3 + \ldots + 19 \cdot 18$ este pătrat perfect.

b) Care este cel mai mic număr natural nenul astfel încât numărul: $b = a \cdot 1 + a \cdot 2 + \ldots + a \cdot 15$ să fie cub perfect?

TESTUL 0.14

❒1. Să se afle numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{14}{ab+2a+b+2}$ este echiunitară.

❒2. Să se afle suma numerelor naturale k pentru care fracția $\frac{2000-k}{97} \in \mathbf{N}$.

❒3. Există numere naturale a care împărțite la 15 dau restul 7 și împărțite la 12 dau restul 3? Justificați răspunsul!

❒4. a) Folosind proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare și scădere arătați că: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{N}$, $x \geq y$.

b) Dacă a + 11 și a sunt pătrate perfecte arătați că 5a – 4 este pătrat perfect, $a \in \mathbf{N}$.

TESTUL 0.15

❒1. Să se determine mulțimile A, B și C dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cap C = \{2; 4\}$

b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 16\}$ și $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leq x < 6\}$;

$B = \{y \mid y = 2k + 1, k \in \mathbf{N}, y < 8\}$.

Luminița Nițulescu, prof., Pitești

❒2. Fie $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1}$ și $b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Comparați numerele a și b.

b) Arătați că numerele a și b dau același rest prin împărțirea cu 165, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Sorin Peligrad, prof., Pitești

❒3. Arătați că pentru oricare $k \in \mathbf{N}$, există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât numărul: $5 \cdot 7^n + 7^{2k}$ este pătrat perfect.

Sorin Peligrad, prof., Pitești

❒4. Să se afle cel mai mic număr natural de două cifre cu proprietatea că suma dintre pătratul și cubul lui este un pătrat perfect.

Ilie Trifon, prof., Pitești

O.M. – Faza locală, Argeș, 2000

TESTUL O.16

❒**1.** Aflați câtul împărțirii numărului 2002 prin numărul natural a, dacă restul este 4 – a.

❒**2.** Aflați câte numere naturale de 5 cifre care încep cu 79 se împart exact la 179 și apoi calculați suma lor.

❒**3.** Aflați numerele naturale x, y, z care verifică egalitatea:

$$2^{3x+2} + 2^{2y+1} + 2^z = 416.$$

❒**4.** Fie $A = \{x \mid x = a^2 + 5b^2 + 5b;\ a = 2k + 1,\ k \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{y \mid y = c^{2002} + c^{1001},\ c \in \mathbf{N}^*\}$. Arătați că $A \cap B = \emptyset$.

Sorin Peligrad, prof., Pitești
O.M. – Faza județeană, Argeș, 2000

TESTUL O.17

❒**1.** Fie mulțimile:

$A = \{ n \in \mathbf{N} \mid 2^{2n+2} \cdot 10^{n+1} - 10 \cdot 2^{3n} \cdot 5^n = 1200\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ 111_{(2)} \le \overline{xx}_{(10)} \le 1101_{(2)}\}$.

Să se verifice dacă cele două mulțimi sunt disjucnte.

F. Vieru, C. Lupu, prof., Bacău

❒**2.** Să se calculeze suma elementelor mulțimii:

$$\{2a + 3b \mid 10a + 17b = 400,\ a, b \in \mathbf{N}\}.$$

Ilie Romeo, prof., Brașov

❒**3.** Câte numere de patru cifre sunt de forma: $222 \cdot k^2$, unde $k \in \mathbf{N}$?

V. Cornea, prof., Hunedoara

❒**4.** Numărul $\overline{abc}$ are cifrele distincte și mai mici ca 6. Dacă $\overline{abc}$ se divide cu (a + b + c), să se arate că și $\overline{(b+c)(a+c)(a+b)}$ se divide cu (a + b + c).

G. Tica, prof., Dolj
O.M. – Faza locală, Bacău, 2000

TESTUL O.18

❒**I. 1.** Completați exercițiul: $6 \cdot 9 : 3 + 5 - 2$ cu o pereche de paranteze, „(;)", astfel încât rezultatul calculului să fie 9.

2. Suma a șase numere naturale distincte este 15. Produsul acestor 6 numere este …

3. Deschizând o carte la întâmplare și însumând numerele celor două pagini la care s-a deschis cartea, obținem 295. Cartea a fost deschisă la paginile …

4. Dacă $\overline{xy} + \overline{yx} = 220$, atunci x + y = …

5. Dintre numerele $a = 10^{20}$ și $b = 20^{10}$ mai mare este …

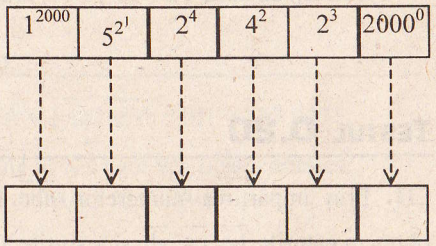
6. Dacă mulțimile A și B verifică simultan condițiile: $A \cap B = \{1, 2\}$ și $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*,\ x \le 3\}$ și $A \setminus B = \emptyset$, atunci A = {…} și B = {…}.

7. Dacă a = 12 – 12 : 3 – 2, atunci ultima cifră a lui a^{2000} este …

8. Descoperiți regula de scriere a șirului și completați, conform regulii găsite, următorii doi termeni ai șirului: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, …, … .

9. Conținutul fiecărei căsuțe din figură reprezintă o literă pe care o puteți găsi calculând puterile și folosind codul:

$6 \to A$
$16 \to C$
$10 \to D$
$8 \to E$
$2000 \to I$
$0 \to L$
$25 \to U$
$1 \to S$.



❒**II. 1.** Arătați că: $\left(17 \cdot 2^{1999} - 6 \cdot 2^{1998} - 2 \cdot 2^{2000}\right) : 10$.

2. Un număr natural n împărțit la 5 dă restul 2, iar n împărțit la 6 dă restul 1. Aflați restul împărțirii lui n la 30.

3. Fie a, b ∈ **N** și mulțimile: $A = \{2a + 7;\ 5\}$ și $B = \{3a - 10;\ b^2 + 1\}$. Aflați a și b astfel încât A = B.

O.M. – Faza locală, Timiș, 2000

TESTUL 0.19

❒**I.** Să se calculeze:

1) $2^{13}:4^6+5^3-5^2\cdot\left[729:3^5+16:\left(7\cdot3^2-55\right)\right]$;

2) $\left[\left(\overline{abc}-\overline{bc}\right):100+10\cdot b\right]:\overline{ba}$, unde a, b sunt cifre nenule.

❒**II.** 1) Să se afle numărul x din egalitatea: $2^{10}\cdot4^7\cdot x+8^9=16^7$.

2) Să se compare numerele: $A=3^{33}-3^{32}-3^{30}$ şi $B=2^{54}+2^{50}$.

Romulus Urs, prof., Deva; Letiţia Rafiriu, prof., Orăştie

❒**III.** Pentru premierea elevilor la un concurs de matematică s-au cumpărat 16 obiecte cu preţul de 50.000 lei, 30.000 lei şi respectiv 10.000 lei. Ştiind că s-a cheltuit suma de 220.000 lei, să se afle câte obiecte de fiecare fel s-au cumpărat.

Dorin Linţ, prof., Deva

❒**IV.** Se consideră numărul de trei cifre $\overline{abc}$.

1) Arătaţi că dacă $\overline{abc}\ \vdots\ 11$ atunci $\left(a+\overline{bc}\right)\vdots 11$.

2) Arătaţi că dacă $\left(a+\overline{bc}\right)\vdots 11$, atunci $\overline{abc}\ \vdots\ 11$.

Emilia Velcea, prof., Lupeni
O.M. – Faza locală, Hunedoara, 2000

TESTUL 0.20

❒**1.** Prin împărţirea numerelor $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ la acelaşi număr natural, obţinem câturile $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ şi resturile a, b, c. Aflaţi împărţitorul.

❒**2.** Fie propoziţiile

p: "3^3 – a este un număr natural divizibil cu 10" şi

q: "39 – 2a este pătrat perfect".

Să se determine numărul natural a, ştiind că:

a) numai una din propoziţiile date este adevărată;

b) ambele propoziţii sunt adevărate.

❒**3.** Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10 se află în două mulţimi, A şi B, astfel încât $A\cap B=\varnothing$. Arătaţi că suma elementelor mulţimii A nu poate fi egală cu suma elementelor mulţimii B.

❒**4.** Să se arate că numărul $A=x^4+2\cdot(5y+1)$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $x, y\in\mathbf{N}$.

O.M. – Faza judeţeană, Hunedoara, 2000

TESTUL 0.21

❒**1.** Arătaţi că numărul: $n=1+2\cdot3+4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15$ nu este pătrat perfect.

❒**2.** a) Fie numărul $p = 13 + 13^2 + 13^3 + \ldots + 13^{2000}$. Arătaţi că p este divizibil cu 10.

b) Arătaţi că numărul 13^{2001} poate fi scris ca o sumă de două pătrate perfecte.

Ioan Chera, prof., Piteşti

❒**3.** Să se determine numărul $\overline{xyz}$ astfel încât: $\overline{xyz0}+\overline{xyz}=2002$.

Ilie Trifon, prof., Piteşti

❒**4.** Fie $X = \{1, 3, 5, 7, \ldots, (2k + 1), \ldots\}$. Construim următorul şir de submulţimii ale mulţimii X: $A_1 = \{1\}$; $A_2 = \{3, 5\}$; $A_3 = \{7, 9, 11\}$ şi aşa mai departe.

a) Scrieţi mulţimile A_4 şi A_5.

b) Calculaţi suma elementelor mulţimii A_{20}.

Sorin Peligrad, prof., Piteşti
O.M. – Faza locală, Argeş, 2001

TESTUL 0.22

❒**1.** Determinaţi elementele mulţimii: $A=\{\overline{ab}\mid\overline{abab}:101=\overline{bbb}:37\}$.

❒**2.** Stabiliţi dacă există numere naturale a, b, c care verifică egalitatea:

$$ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)=2001.$$

Justificaţi răspunsul.

❒**3.** Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ şi $\overline{xy}$ pentru care:

$$\overline{abc}+\overline{bc}+c=2^{\overline{xy}}+57.$$

❒**4.** Dacă a, b, c sunt numere naturale nenule astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$, atunci arătaţi că oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$ există p şi q numere naturale nenule astfel încât $a^{2n}=p^2+q^2$.

O.M. – Faza judeţeană, Argeş, 2001

TESTUL 0.23

❒1. a) Aflați cel mai mic număr natural de patru cifre care împărțit la 61 dă restul 23.

b) Aflați cel mai mare număr natural de patru cifre care împărțit la 61 dă restul 23.

c) Calculați suma tuturor numerelor naturale de patru cifre care împărțite la 61 dau restul 23.

❒2. Comparați numerele a și b, unde:

$a = 2^{51} \cdot 2^{52} \cdot 2^{53} \cdot \ldots \cdot 2^{100}$; $b = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{3774}$.

Sorin Peligrad, prof., Pitești

❒3. Arătați că nu există numere naturale a, b, c care verifică simultan egalitățile: $b + c = a + 1$ și $b^2 + c^2 = a^2$.

Sorin Peligrad, prof., Pitești
Concursul de matematică "Dan Barbilian",
Școala "G. Topârceanu", Mioveni, Argeș, 9.12.2000

TESTUL 0.24

❒1. Determinați numărul natural n știind că numerele $4n + 1$, $4n + 2$, $4n + 3$, 1989 aparțin unei mulțimi cu trei elemente.

❒2. Se dă numărul $A = 3^{2n+1} \cdot 5^{3n+2} - 9^{n+1} \cdot 5^{3n+1}$. Arătați că A se divide cu 30, oricare ar fi n număr natural.

❒3. Să se găsească toate numerele de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10 care au proprietatea că $\frac{36}{a^2 + b} \in \mathbf{N}$.

TESTUL 0.25

❒1. Se dă numărul: $A = 4^{n+1} \cdot 5^{2n+3} - 2$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Aflați de câte ori numărul A conține cifra 9.

b) Arătați că numărul care reprezintă suma cifrelor numărului A este divizibil prin 3.

❒2. Se consideră mulțimile:

$A = \{6^n + 2002, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{1995p + 7, p \in \mathbf{N}\}$

a) Stabiliți dacă $32\,506 \in A \cup B$.

b) Calculați $A \cap B$.

❒3. Într-o urnă sunt bile albe și bile negre. Numărul de bile albe este de patru ori mai mare decât numărul de bile negre. După ce s-au extras 10 bile negre și 30 bile albe au rămas în urnă de șase ori mai multe bile albe deâct bile negre. Aflați câte bile albe și câte bile negre erau în urnă la început.

TESTUL 0.26

❒1. Să se arate că suma $2001^p + 2001^p + \ldots + 2001^p$, care are 2000 de termeni, este divizibilă cu $87 \cdot 10^3$, unde „p" este un număr natural nenul.

❒2. Se dă numărul: $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2001}$ și propoziția:

p: Numărul „a" este impar și „a" este pătrat perfect.

Să se precizeze și să se justifice dacă propoziția „p" este adevărată sau falsă.

❒3. Să se determine cardinalul mulțimii:

$A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = a \cdot b + a + b$, unde „a" și „b" sunt cifre în baza 10$\}$

❒4. Fie numerele $a = 5n + 3$ și $b = 8n + 5$, $n \in \mathbf{N}$. Arătați că $[a, b] = a \cdot b$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

O.M. – faza locală Bacău, 2001

TESTUL 0.27

❒1. a) Cercetați dacă $\frac{\overline{xx9} + \overline{8x} + 7}{\overline{x9x} + \overline{x6}} \in \mathbf{N}$, unde x este cifră în baza 10.

b) Calculați $2002 - (2000 \cdot 2001 + 2001) : 2001^2$.

❒2. Să se afle restul împărțirii numărului natural

$n = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2000$ la 2001.

❒3. Câte numere naturale de 3 cifre sunt multipli de 3 și nu sunt multipli de 27.

❒4. Să se ordoneze descrescător fracțiile:

$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots, \frac{4003}{2002}$.

O.M. – faza județeană Bacău, 2001

PROBE DE EVALUARE

NIVELUL A

I. 1. Scrieți cu cifre arabe:

a) două sute de mii treizeci și șase;

b) cinci sute de mii cinci;

c) șase milioane douăzeci și cinci.

2. Reprezentați pe axa numerelor punctele A, B, C, D, E de coordonate 2, 4, 5, 6, 7 și calculați lungimile segmentelor AB, AC, AD, BE, CE, DE.

3. Dacă a = 1375, b = 4573, c = 657, d = 275, calculați:

a) $a + [b - (c + d)]$;

b) $ab + ac - ad$;

c) $a : d + b \cdot d - (b + c)$.

4. Calculați:

a) $\{[(12^2 + 5^2) : 13]^2 - 2^7 - 2^0\} : 2^3$;

b) $[(10^3 : 5^2 : 8 + 3^2 \cdot 5^2) : 23] \cdot 2^{2^0}$.

5. Fie A = {1, 2, 3} și B = {1, 3, 5}.

a) Scrieți submulțimile mulțimii A.

b) Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

II. 1. Scrieți cu cifre romane: 19, 38, 75, 387.

2. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 4, 7 și 8 dau restul 1 și câtul diferit de zero.

3. Rezolvați în N ecuațiile:

a) $x + (49 - 17) = 115$;

b) $x - (14 + 37) = 25$;

c) $(x + 1) \cdot 2 + 1250 = 3714$;

d) $(231 + x) + 123 = 7156$.

4. Determinați cu cât este mai mare triplul numărului 452 decât dublul numărului 507.

5. Calculați:

a) $645 : (70 - 55) - (70 : 2 - 2315 \cdot 0) : 5$;

b) $17^{20} - (16 \cdot 17^{20} + 17^{20}) : 17$.

NIVELUL B

I. 1. Pe o axă de coordonate se consideră punctele A și B astfel încât AB = = 5 și coordonata punctului A este 2.

a) Determinați coordonatele punctelor C și D situate în această ordine între A și B astfel încât AC = 2 și DB = 1.

b) Calculați lungimile segmentelor AD, CD, CB.

2. Dacă $a - 2b = 4$, calculați x din:

a) $x + 5a - 10b = 40$;

b) $x - 16 + 3a - 6b = 14$;

c) $7a - x - 14b = 21$.

3. Determinați ultima cifră a numărului $4^{23} + 7^{2436} + 6^{1051}$.

4. Câte zerouri are la sfârșit numărul $4^5 \cdot 5^3 \cdot 7^4$.

5. Calculați:

a) $2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 5^0 + 2^4 \cdot 3 - (6^{12})^2 : 2^{22} : (3^6)^4 + 24$;

b) $3^5 : \{9^2 \cdot 7 - [3 - (2^3 \cdot 5^3 - 3^2 \cdot 10^2 - 5^2) : (1 + 4)^2] : 10^4 - 2^2 \cdot 3^4\}$.

II. 1. a) Numărul A = 1 + 2 + 3 + ... + 1999 + 2000 este par sau impar?

b) Determinați suma a șapte numere naturale consecutive știind că al doilea este 7.

2. Determinați numerele naturale a, b, c care verifică relațiile:

a) $a^{b^c} = 27$;

b) $(a^b)^c = 4$;

c) $a^b \cdot c^b = 9$.

3. Scrieți din baza zece în baza doi numerele: 14; 27; 47.

4. Scrieți din baza doi în baza zece numerele: 1101_2; 101101_2; 100111_2.

5. Arătați că dacă numărul $\overline{laa}$ este pătrat perfect, atunci și a este pătrat perfect.

NIVELUL C

I. 1. Arătați că numărul $1995 + 1996^n + 2001^n$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

2. Fie $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$.

a) Determinați submulțimile lui A care sunt și submulțimi ale lui B.

b) Determinați submulțimile lui A care nu sunt și submulțimi ale lui B.

c) Determinați submulțimile lui B care nu sunt și submulțimi ale lui A.

3. Arătați că suma a șase puteri consecutive ale lui 2 se divide cu 7.

4. În câte moduri putem avea câtul 5 și restul 2 împărțind numere mai mici ca 100?

5. Determinați numărul natural care verifică fiecare relație:

a) $(5^2)^{x+3} = 5^{4x} \cdot 5^2$;

b) $(3^x)^5 = 3^2 \cdot 3^8 \cdot 3^5$;

c) $(6^4)^x = (6^7)^{2^2}$.

II. 1. a) Determinați numerele naturale care împărțite la 9 dau restul 5 și împărțite la 11 dau restul 7.

b) Determinați numerele naturale care nu sunt mai mari decât 21 și nu sunt mai mici decât 8.

2. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3x - 1 \geq 20 \text{ și } 120 > (x - 1) \cdot 5\}$.

a) Determinați cardinalul mulțimii A.

b) Scrieți două submulțimi ale lui A formate din câte 5 elemente.

c) Determinați suma elementelor mulțimii A.

3. Arătați că numărul $15^n + 3^n \cdot 5^{n+1} + 3^n \cdot 5^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$ este divizibil cu 31.

4. Ultima cifră a unui număr de șase cifre este 4. Dacă mutăm ultima cifră a numărului înaintea primei cifre obținem un număr de patru ori mai mare decât cel dat. Determinați numărul.

5. Comparați numerele:

a) $9^3 + 36^4 + 25^5 + 15^3 \cdot 2^3$ cu $5^{10} + 30^3 + (6^4)^2 + (3^2)^3$;

b) $9^{21} - 3^{40}$ cu 2^{63};

c) $4^{19} - 2^{36}$ cu 3^{28}.

MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE

LUCRAREA 1

I. 1. a) Aproximarea prin adaos până la sute a numărului 9367 este ...

b) Rotunjirea până la sute a numărului 9367 este ...

2. a) Rezultatul calculului: $729 - 15471 : 27$ este ...

b) Numărul care împărțit la 37 dă câtul 19 și restul 5 este ...

3. a) Dacă $ab + ac = 105$ și $b + c = 15$, atunci $a = \ldots$

b) Rezultatul calculului: $(2^{17})^5 : 2^{82} + 3^2 : 5^0$ este ...

II. 4. Fie șirul de numere: 7, 10, 13, ...

a) Scrieți următoarele două numere din acest șir.

b) Aflați ce număr este situat pe locul 20 în acest șir.

c) Calculați suma primelor 20 de numere din acest șir.

5. Aflați toate numerele de forma $\overline{3a7b}$ divizibile cu 15.

LUCRAREA 2

I. 1. a) Aproximarea prin lipsă până la sute a numărului 7239 este ...

b) Rotunjirea până la sute a numărului 7239 este ...

2. a) Rezultatul calculului: $836 - 18312 : 28$ este ...

b) Numărul care împărțit la 19 dă câtul 31 și restul 7 este ...

3. a) Dacă $ab + ac = 72$ și $b + c = 24$, atunci $a = \ldots$

b) Rezultatul calculului: $(3^{41})^3 : 3^{121} - 2^3 : 7^0$ este ...

II. 4. Fie șirul de numere: 6, 10, 14, ...

a) Scrieți următoarele două numere din acest șir.

b) Aflați ce număr este situat pe locul 15 în acest șir.

c) Calculați suma primelor 15 numere din acest șir.

5. Aflați toate numerele de forma $\overline{5a3b}$ divizibile cu 18.

LUCRAREA 3

I. 1. Rezultatul calculului: $37 - 48 : 16$ este ...
2. Numărul care împărțit la 17 dă câtul 15 și restul 9 este ...
3. Dacă $3a + 6b = 24$, atunci $a + 2b = ...$
4. Numărul x care verifică egalitatea $3x - 2 = 28$ este ...
5. Dacă $2^y = 16$, atunci $y = ...$
6. Dintre numerele 4^{10} și 8^5 mai mare este ...
7. Numărul 37 în baza doi este ...
8. Numărul $\overline{a0ba0b}$ descompus în baza 10 este ...
9. Elementele mulțimii $A = \{x \mid x = y + 2, y \leq 3, y \in \mathbf{N}\}$ sunt ...

II. 10. Calculați:
a) $10 \cdot \{15^5 : 225 + [(3^2 \cdot 5)^{27} : (3^{52} \cdot 5^{27}) + 5^2] : 17\}$;
b) $[7^{249} : 7^{225} + 5^{47} \cdot \overline{5^{35} \cdot 5} + (3^7)^{15}] : [(7^3)^8 + 3^{62} \cdot 3^{43} + 5^{117} : 5^{34}]$.

11. Arătați că numărul $\overline{a0ba0b}$ este divizibil prin 1001.

12. Într-o clasă sunt 27 de elevi. Dacă 15 elevi participă la olimpiada de matematică și 19 elevi participă la olimpiada de română, atunci aflați numărul minim posibil și numărul maxim posibil de elevi care participă la ambele olimpiade.

LUCRAREA 4

I. 1. Rezultatul calculului: $53 - 72 : 24$ este ...
2. Numărul care împărțit la 23 dă câtul 19 și restul 7 este ...
3. Dacă $4a + 6b = 32$, atunci $2a + 3b = ...$
4. Numărul x care verifică egalitatea $5x + 7 = 52$ este ...
5. Dacă $3^y = 27$, atunci $y = ...$
6. Dintre numerele 9^{15} și 27^{11} mai mare este ...
7. Numărul 45 în baza doi este ...
8. Numărul $\overline{ab0ab0}$ descompus în baza 10 este ...
9. Elementele mulțimii $A = \{x \mid x = 3y, y < 5, y \in \mathbf{N}^*\}$ sunt ...

II. 10. Calculați:
a) $15 \cdot \{12^2 : 144 + [(2^3 \cdot 3)^{17} : (2^{48} \cdot 3^{17}) + 7^2] : 19\}$;
b) $[5^{347} : 5^{311} + (7^4)^{12} + 3^{19} \cdot 3^{17} \cdot 3] : [(5^4)^9 + 3^{81} : 3^{44} + 7^{23} \cdot 7^{25}]$.

11. Arătați că numărul $\overline{ab0ab0}$ este divizibil prin 1001.

12. Într-o clasă sunt 29 de elevi. Dacă 18 elevi participă la olimpiada de matematică și 15 elevi participă la olimpiada de română, atunci aflați numărul minim posibil și numărul maxim posibil de elevi care participă la ambele olimpiade.

LUCRAREA 5

1. Calculați:
a) $7 + 14 + 21 + 28 + ... + 364$;
b) $\left(2^{n+4} + 2^{n+3} + 2^{n+2}\right) \cdot \left(3 + 40^{1^{2000}}\right) \cdot (25)^{28} : \left(5^5\right)^1 : 2^n$;
c) $(3^2)^8 : 3^{2^4} \cdot (2^3 - 1) - 2^0 \cdot 2^2$.

2. Determinați valoarea logică a propozițiilor:
a) $3 + 7 = 9$; b) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^9$; c) $7^{30} : 7^{28} = 49$;
d) $5 - 2 > 7$; e) $3^{39} > 5^{26}$; f) $11_{(10)} = 1011_{(2)}$;
g) Resturile împărțirii unui număr la 3 pot fi: 0, 1, 2.
h) Pentru orice număr natural x avem: $1 \cdot x = x$.

3. Calculați $x \in \mathbf{N}$ din $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$.

4. Fie mulțimile A și B cu proprietățile: $A \cup B = \{a, b, c, e, f\}$, $A \cap B = \{a, c\}$, $A - B = \{b, e\}$. Determinați elementele mulțimilor A și B.

LUCRAREA 6

I. 1. Scrieți cu cifre arabe:
a) douăzeci și trei de mii patru sute cincizeci și șase;
b) patruzeci de mii cinci sute nouă;
c) opt sute de mii cinci.
2. Scrieți cu cifre romane: 4, 9, 29, 56, 105, 1050, 3496.

II. Pe o axă de coordonate cu originea în O reprezentați punctul A de coordonată 8. Determinați coordonata punctului B de pe această axă știind că lungimea segmentului AB este de 4 cm.

III. Calculați:
a) $[1476 : 12 + (21396 : 12 + 4865 : 35) : 961] - 1000 : 8$;
b) $\{[(32 \cdot 5 + 8 \cdot 4) : 96 + 54 : 6] : 11 + 1\} \cdot [2 + 14 \cdot 5 - (2 \cdot 75 - 6) : 2]$.

IV.1. Determinați numerele naturale care verifică egalitățile:

a) $x + 2375 = 5723$; b) $x - 1237 = 457$;

c) $(250 + x) \cdot 25 = 10\,000$; d) $2x - 1000 : 25 - 324 = 14$.

2. Determinați numerele naturale care verifică inegalitățile:

a) $2(x - 1) \leq 6$; b) $(x + 3) \cdot 3 - 25 \leq 5$;

c) $2(5x + 19x - 17x) \leq 42$; d) $9 : (x - 5) < 3$ și $x : 5 < 2$.

LUCRAREA 7

1. Se știe că $4^n = 256$.

a) Calculați 2^{2n-4}; 2^{2n-6}; 2^{2n+1}; 2^{2n+3}.

b) Arătați că $2^{3n-5} = 2^{2n-1}$ pentru n calculat.

2. Fie mulțimea $M = \{ x \mid x \in \mathbf{N}, 800 < x \leq 1193\}$. Determinați toate numerele x din M care împărțite la 24, 42 și 56 dau de fiecare dată restul 17.

3. Calculați:

a) $5 \cdot \{7 + 3 \cdot [46 + 6 \cdot (27 - 32 : 4)]\}$;

b) $(2^4)^4 : 2^{2^4} \cdot (3^2 - 1) - 3^0 \cdot 2^2$;

c) $1999^{1999} - 1998 \cdot 1999^{1998}$.

4. Scrieți numărul 37 din baza 10 în baza 2 și verificați dacă ați lucrat corect scriind numărul obținut din baza 2 în baza 10.

LUCRAREA 8

1. Calculați:

a) $125 \cdot 1111^3 - 5555^3$;

b) $9^5 - (3^5)^2 + 8^4 - (2^4)^3$;

c) $1 + 2^7 : 4^3 + 3^3 \cdot 27 : 3^5 + (3 \cdot 2^4 - 4^2) : 2^3$.

2. Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cap B = \{1, 2, 4\}$; b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $A - B = \{3\}$.

3. Diferența a două numere naturale este 18. Împărțind suma lor la diferența lor, obținem câtul 17 și restul 16. Aflați numerele.

4. Determinați pătratele perfecte de două cifre pentru care suma cifrelor este pătrat perfect.

LUCRAREA 9

1. Fie mulțimea $M = \{ x \mid x \in \mathbf{N}, 3 < x \leq 15\}$.

a) Știind că $A = \{x \mid x \in M, x \vdots 2\}$ și $B = \{x \mid x \in M, x \vdots 5\}$ calculați $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

b) Scrieți submulțimile mulțimii B.

2. Împărțind numerele 692, 1244 și 1520 la același număr, se obțin resturile 7, 11 și 13. Determinați numărul la care au fost împărțite.

3. Calculați:

a) $(3^2 + 3^{87} : 3^{23} + 9^{33} + 81^5) : [9 + (3^2)^{10} + 9^{42} : 3^{20} + 27^{23} : 3^3] \cdot 1^{2001}$;

b) $[5^{379} : 5^{375} + (5^{10})^6 + 4^{25}] : [5^4 + (5^2)^{30} + (2^{25})^2] \cdot 7^2$.

4. Scrieți numărul 101101 din baza 2 în baza 10 și verificați dacă ați lucrat corect scriind numărul obținut din baza 10 în baza 2.

LUCRAREA 10

I. 1. Rezultatul calculului $324 : 6^2 + \left(2^5\right)^6 : 2^{30}$ este .....

2. Dintre numerele 9^{25} și 27^{17} mai mare este .....

3. Dacă $2a + b = 13$ și $a + 2b = 11$, atunci $a + b =$ .....

4. Ultima cifră a numărului 87^{329} este .....

II. 5. Calculați:

a) $\left[2^{15} \cdot 2^{35} + \left(7^5\right)^5\right] : \left(4^{25} + 7^{37} : 7^{12}\right)$;

b) $\left(3^{19} \cdot 25^9\right)^2 : 15^{36}$.

6. Fie $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 72$. Calculați restul împărțirii numărului A prin 35.

7. a) Arătați că numărul $2^{19} \cdot 8^7 \cdot 25^{17}$ este pătrat perfect;

b) Fie $N = 2^{n+3} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+2}$. Arătați că $N \vdots 17$, oricare ar fi numărul natural n.

TESTE DE EVALUARE
TIP EXAMEN DE CAPACITATE

TESTUL I

A. 1. Rezultatul calculului $\left[\left(5^3\right)^2 : 5^{2^5} - 25\right] : 5$ este...

2. Ultima cifră a numărului $3^{2000} + 4^{2000} + 7^{2000}$ este ...

3. Dacă A = {1, 2, 4}, B = {2, 3, 5}, C = {2, 4, 6}, atunci $(A \cup B) \cap C$ este ...

4. Dacă $x \in \mathbf{N}$ şi $3x - 1 \in \{2, 5, 8, 14\}$, atunci x este ...

5. Dacă fracţiile $\frac{2}{3}$ şi $\frac{x+1}{y-2}$ sunt echivalente, atunci cele mai mici valori ale numerelor x şi y sunt ...

6. Valoarea de adevăr a propoziţiei $(2^3 + 2 \cdot 2^4 + 2^9) : (8 + 2^{12} : 2^3 + 2^5) = 2$ este ...

7. Cel mai mic număr natural care prin împărţirea la 5, 7 şi 8 dă de fiecare dată restul 3 şi câtul diferit de zero este ...

8. Dintre două fracţii cu acelaşi numitor este mai mare aceea cu numărătorul ...

9. Numărul elementelor mulţimii $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 < x \leq 9\}$ este ...

B. 10. Fie mulţimea $A = \{x, x + 1, x + 2\}$, $x \neq 0$, $x \in \mathbf{N}$. Folosind elemente din mulţimea A scrieţi fracţiile:

a) supraunitare; b) echiunitare; c) subunitare.

11. a) Numărul $1 + 2 + 3 + \ldots + 1999$ este par sau impar? Justificaţi.

b) Determinaţi numerele prime x, y, z astfel încât $3x + 3y + 4z = 39$.

c) Determinaţi cifrele a, b, c, d, e, f astfel încât $3 \cdot \overline{abcdef} = \overline{bcdefa}$ în baza 10.

12. a) Determinaţi numerele de forma $\overline{xyyz}$, scrise în baza zece, astfel încât $\frac{\overline{xy}}{yz} = 2$ $(x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0)$.

b) Determinaţi toate fracţiile de forma $\frac{\overline{1x7}}{yx}$ în baza zece care se simplifică cu 3.

c) Arătaţi că numărul $12^n + 3^n \cdot 4^{n+1} + 3^n \cdot 4^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$, este divizibil cu 21.

TESTUL II

A. 1. Dacă suma a trei numere naturale pare consecutive este 198, atunci numerele sunt ...

2. Un număr natural a împărţit la 5 dă câtul 6 şi restul r. Dacă numărul a este divizibil cu 3 şi nu este divizibil cu 5, atunci restul r este ...

3. Numerele naturale mai mici ca 17 divizibile cu 5 sunt ...

4. Rezultatul calculului $(2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^{13} : 2^5 + 1) : [(2^3)^2 \cdot 8 + 2^0]$ este ...

5. Cel mai mare număr natural care împărţit la 207 dă câtul şi restul mai mici sau egale cu 203 este ...

6. Dacă un băiat are acum 15 ani, iar mama sa 39 de ani, atunci anul în care mama băiatului avea vârsta de 5 ori mai mare decât vârsta fiului său este ...

7. Dacă mărim şi numărătorul şi numitorul unei fracţii de acelaşi număr de ori fracţia este ...

8. Valoarea de adevăr a propoziţiei $(3^2 + 3 \cdot 3^4 + 3^9) : (9 + 3^7 : 3^2 + 27^3) = 3$ este ...

9. Ultima cifră a sumei $5^{2001} + 7^{2001}$ este ...

B. 10. Fie mulţimile $A = \{x \mid x$ este cifră în sistemul binar$\}$, $B = \{y \mid y = 2^x + 3x, x \in A\}$, $C = \{z \mid z = (y + 2)^x, x \in A, y \in B\}$.
Determinaţi: $A \cup B$, $A \cap C$, $B - C$, $A \cup (B - C)$, $C - (A \cap C)$, $C \cap (A \cup B)$.

11. a) Cu ce număr trebuie înmulţit 9 pentru a obţine 1989?

b) La ce număr trebuie împărţit 1989 pentru a obţine câtul 9?

c) Prin împărţirea cărui număr la 1989 se obţine câtul 9?

12. a) Determinaţi numerele naturale x şi y dacă suma lor este 2289 şi prin împărţirea lui x la y se obţine câtul 17 şi restul 111.

b) Câte numere naturale mai mari ca 200 şi mai mici ca 300, împărţite la 7 dau restul 4?

c) Reconstituiţi împărţirea pentru care diferenţa dintre deîmpărţit şi împărţitor este 1436, câtul este 15 şi restul 64.

TESTUL III

A. 1. Cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 3, 4, 5 și 7 dă resturile 1, 2, 3 și 5 este ...

2. Dacă diferența a două numere naturale nenule este 5, numărul mic fiind mai mare ca 5, atunci câtul și respectiv restul împărțirii celui mare la celălalt este ...

3. Dacă $11 + 12 + \ldots + 22 = 3^2 \cdot 2 \cdot 11x$, atunci x este ...

4. Dacă mulțimile A, B, C satisfac simultan condițiile:

a) $A \cup B \cup C = \{3, 4, 5\}$;

b) $A \cap B = \{4\}$;

c) $B - A = \varnothing$;

d) $B - C = A - \{5\}$,

atunci A, B, C sunt ...

5. Rezultatul calculului $(1 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2) : 15$ este ...

6. Dintre două fracții cu același numărător este mai mare aceea cu numitorul ...

7. Dacă numărătorul unei fracții este 15, atunci există ... fracții supraunitare.

8. Dacă $\frac{1}{2} < \frac{x}{5} < \frac{11}{8}$, atunci x este ...

9. Oricare ar fi numerele raționale pozitive a, b, c, dacă $a = b$, $a \geq c$ și $b \geq c$, atunci $a + c = \ldots$ și $a - c = \ldots$

B. 10. Fie mulțimea $A = \{1, 3, 5\}$. Scrieți toate fracțiile care să aibă la numărător un element al mulțimii a, iar la numitor un număr natural diferit de zero mai mic decât 7. Subliniați cu o linie fracțiile supraunitare și cu două linii fracțiile echiunitare.

11. a) Câte numere de trei cifre dau prin împărțire la 17 restul 11?

b) Diferența a două numere este 987. Dacă micșorăm descăzutul cu 654 și mărim scăzătorul cu 321, cât este diferența?

c) Câte numere naturale sunt formate din două cifre distincte?

12. a) Arătați că numărul $N = 3^{n+2} \cdot 2^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$, este divizibil cu 63.

b) Arătați că numărul $N = 2^{111} + 3^{222} + 4^{333} + 5^{444} + \ldots + 9^{888}$ se divide cu 5.

c) Determinați toate numerele naturale scrise în baza zece cu cel puțin patru cifre care au proprietatea că oricare două cifre vecine ale sale formează un număr divizibil cu 23.

TESTUL IV

A. 1. Dacă $A = \left\{x \middle| \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\right\}$, $B = \left\{x \middle| \frac{12}{2x+1} \in \mathbf{N}\right\}$, $C = \{x \mid \overline{3x1} \vdots 3\}$, atunci $B - (A \cap C) = \ldots$

2. Proprietățile adunării în mulțimea numerelor naturale sunt ...

3. Determinați numerele naturale x astfel încât să avem: $\frac{5}{x} > \frac{x}{7} > \frac{13}{15}$.

4. Dacă $x = 3$ și $y + z = 10$, atunci $15x - 3(y + z)$ este ...

5. Ultima cifră a numărului $1996^n + 2000^{n+1} + 1995^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}^*$ este ...

6. Rezultatul calculului:

$(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{43} - 2^{46} + [3^{148} : 3^{43} - (3^7)^{15}] + 16\}$ este ...

7. Cel mai mic număr natural care împărțit la 25 dă restul 19 este ...

8. Dacă $x - \{19095 : 335 - 2^2 \cdot [2 \cdot 5 + (2^3 \cdot 5^2)^{25} : (2^{73} \cdot 5^{50})]\} \cdot 5 = 5$, atunci x este ...

9. Ultima cifră a numărului $11^3 + 22^3 + \ldots + 99^3$ este ...

B. 10. a) Scrieți numerele naturale $\overline{xy}$ care sunt egale cu $\overline{yx}$.

b) Scrieți numerele naturale $\overline{x1y}$ care sunt egale cu $\overline{y1x}$.

c) Scrieți toate numerele de trei cifre distincte ce se pot forma cu cifrele 0, 2 și 3.

11. Fie numerele $A = 2 \cdot (10^{75} - 1)$ și $B = 3 \cdot (10^n - 1)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Calculați prima și ultima cifră a acestor numere.

b) Câte cifre de 9 se folosesc în scrierea fiecărui număr?

c) Din câte cifre este format fiecare număr?

12. a) Determinați numărul natural de două cifre care se împarte exact la suma cifrelor sale dând câtul 3.

b) Arătați că nu există nici un număr natural care împărțit la 16 să dea restul 4 și împărțit la 20 să dea restul 5.

c) Folosind puterile naturale ale lui 2, să se stabilească câte cifre îi corespund numărului 400_{10} scris în sistemul binar.

TESTUL V

A. 1. Dacă x şi y sunt submulţimi ale mulţimii A = {1, 2, 3, 4} şi x – y = = {1, 2}, iar y – x = {4}, atunci x = … şi y = …

2. Fie A = {x | x∈N, $5^x \le 625$}, B = {x | x∈N, $(7^0 + 1^{1999} + 1^{2000} + 1^{2001})^x <$ < 64} şi propoziţiile:

p_1: „A ⊂ B“; p_2: „B ⊂ A“; p_3: „A = B“.

Este adevărată propoziţia …

3. Rezultatul calculului:

(7174 : 34 + 124840 : 8 – 121 · 46 – 70 · 5) : (11 · 51 + 13 · 14 + 357) este …

4. Cel mai mic număr natural care împărţit pe rând la 2, la 3 şi la 4 dând de fiecare dată restul 1 este …

5. Diferenţa dintre un număr natural par şi un număr prim este 1000. Numerele sunt …

6. Întrebat câţi porumbei are, Mihai a răspuns: „Eu am porumbei şi iepuri, în total 51 de capete şi 132 de picioare“. Numărul porumbeilor lui Mihai este …

7. Numărul divizorilor lui 72 este …

8. Dacă dintr-un număr de trei cifre scădem 7 rezultatul obţinut se divide la 7; dacă scădem 8 rezultatul se divide la 8, iar dacă scădem 9 rezultatul obţinut se divide la 9. Numărul căutat este …

9. Scrierea în cifre a numărului două milioane două sute de mii doi este ……

B. 10. a) Fie $4^n = 64$. Calculaţi 2^{2n+2} şi 2^{4n}.

b) Calculaţi $10 \cdot [2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 - 5^{24} : 5^{22} + (2^4)^5 : 2^{19}]$.

c) Fie numărul $A = 9 \cdot 10^{n+3} + 10^n + 10^{n-2} - 1$ scris în baza 10. Să se găsească cifrele numărului şi câte cifre din fiecare fel sunt.

11. a) Determinaţi cifrele a, b, c, d în sistemul de numeraţie zecimal astfel încât să avem egalitatea: $\frac{1}{x+y+z+t} = \frac{\overline{xyz}}{10^4}$.

b) Determinaţi două numere de două cifre terminate cu 7 astfel ca produsul lor să aibă primele două şi ultimele două cifre egale.

c) Arătaţi că suma dintre un număr de patru cifre scrise în baza zece şi răsturnatul său este divizibilă cu 11.

12. Fie numărul $A = \overline{xxxyyy}$ scris în baza zece.

a) Să se arate că numărul A se divide cu 37.

b) Dacă x = y, atunci A se divide cu 7, 11 şi 13.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

PROBLEME RECAPITULATIVE DIN CICLUL PRIMAR

1. 20; 25; 50; 52. **2.** 77; 75; 72; 57; 55; 52; 27; 25; 22. **3.** 741; 147. **4.** I, V, L, VI, IV, LV, VL, LI, IL, LIV, LVI, IVL, VIL. **5.** a) IL, LXV, LXXXIV; b) CCCLVII, DLXVIII, CMLXXVI; c) MCCC, MMII, MMMXXV.

6. Adi avea 450 000 lei, Alexandra 250 000 lei iar Andreea 300 000 lei. Le-au rămas Alexandrei 250 000 – (25 000 + 18 000) = 207 000 (lei); Andreei 300 000 – (27 000 + 10 000) = 263 000 (lei); lui Adi 450 000 – (37 000 + 10 000) = 403 000 (lei).

7. 150 000 lei, 170 000 lei. **8.** 1119. **9.** 17 048, 51 144, 4 262. **10.** 8 600; 17 200; 17 457. **11.** 876. **12.** 520. **13.** a) 102; b) 111; c) 123;

d)	a	1	3	3	1	1	4	4	2	2	1	1	5	2	2	3	7	6	6	1	1
	b	3	1	3	4	2	2	1	4	1	5	1	1	2	3	2	0	1	0	0	6
	c	3	3	1	2	4	1	2	1	4	1	5	1	3	2	2	0	0	1	6	0

$\overline{abc} \in$ {133, 313, 331, 142, 124, 421, 412, 241, 214, 151, 115, 511, 223, 232, 322, 700, 610, 601, 106, 160} ⇒ 106. **14.** 18 fete şi 6 băieţi. **15.** 300 000 lei. **16.** 15 pagini. **17.** 468. **18.** 106. **19.** 968. **20.** 99; 97. **21.** a) 1 300; b) 30 060; c) 8 309; d) 39 877; e) 15; f) 3 366 501; g) 24; h) 21. **22.** a = 91, b = 204, c = = 168 şi a) 893; b) 513; c) 340. **23.** a) 10; b) 6; c) 7; d) 1 010.

24. a) 2(a + b) + 3(b + c) = 55; b) 3(a + b) + 2(b + c) = 60; c) (a + b) + + 7(b + c) = 77.

25. a) 123; b) 627; c) 40. **26.** a = 50; b = 5; c = 1 şi 5 · a + 4 · b – 3 · c = 300

27. A = 6 416; B = 1710, c = 7 922. **28.** A + B = 2 851; A – B = 1 151; A · B = 1 700 850; (A + 549) : B = 3. **29.** A = 18 210; B = 9 105 şi 3A : 2B = = 3. **30.** a) 13,987 m; b) 35,57 hm; c) 510 g; d) 61 ℓ; f) 68,877 kl; g) 11 120 s; h) 1h 50 min 15 s; i) 2 802 m^2; j) 69 306,93 m^2.

NUMERE NATURALE

1. Scrierea şi citirea numerelor naturale; şirul numerelor naturale

1. a) 1008; **b)** 11078; **c)** 203601; **d)** 1062305; **e)** 2000031007. **2.** trei sute unu; cincisprezece mii şaptezeci; trei sute unu mii şapte; două milioane cinci

sute zece; trei sute şaptezeci milioane cinci sute unu mii patru sute şapte.
3. a) 170; **b)** 9687; **c)** 1600; **d)** 10020; **e)** 10324. **4. a)** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; **b)** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; **c)** 1, 2; **d)** 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14; **e)** 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. **5. a)** $\overline{abcd}$, $a \neq b \neq c \neq d \neq a$; **b)** $\overline{abcd}$; **c)** $\overline{aabc}$; **d)** $\overline{a72b}$. **6. a)** 100; **b)** 102; **c)** 110; **d)** 11102.
7. a) 99; **b)** 999; **c)** 987; **d)** 9988. **8.** 2100 şi 9188. **9. a)** XXXVII; **b)** CXLV; **c)** MMDCCLXIX; **d)** CMLVII; **e)** MM. **10. a)** 14; **b)** 27; **c)** 1786; **d)** 1960. **11.** 4013, 4031, 1304, 1340, 3104, 3140. **12.** 1236, 1326, 2316, 2136, 3126, 3216. **13.** 5056, 4156, 1456, 3256, 2356. **14.** 132, 131, 143, 314, 440. **15. a)** 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789; **b)** 9876, 8765, 7654, 6543, 5432, 4321. **16.** 104, 475, 938, 1998. **17. a)** VII + IX = XVI; **b)** XI – V = VI; **c)** CC + XI = CCXI; **d)** CCX + I = CCXI; **e)** MI + IX = MX; **f)** XL – XXV = XIV + I. **18. a)** 430; **b)** 0; **c)** 1434. **19.** XXXVII, XLII, DCCXXXV, MCMXCII, MMI, MMMDCCLVII. **20.** 27, 46, 14, 22, 60, 1900, 109, 620, 1904, 48, 49, 10 000, 90 000, 50 000, 40 000, 95 000.
21. a) 174, 147, 741, 714, 417, 471; **b)** 509, 590, 905, 950. **22.** 444, 555, 666, 777, 888. **23.** 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789. **24. a)** 27, 72, 20, 70; **b)** 11, 44, 99, 14, 19, 49, 41, 91, 94. **27. a)** $\underbrace{111\ldots1}_{\text{12 cifre}}$, $\underbrace{22\ldots2}_{\text{6 cifre}}$, $\underbrace{33\ldots3}_{\text{4 cifre}}$, 444, 66.

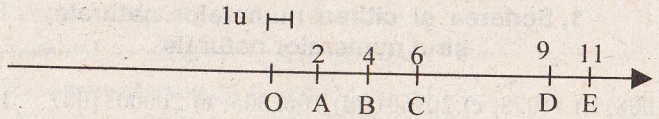
28.

a	5	6	4	7	3	8	9	2
b	6	5	7	4	8	3	2	9
$\overline{ab57}$	5657	6557	4757	7457	3857	8357	9257	2957

29. a) 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 253, 264, 275, 286, 297, 374, 385, 396; **b)** Analog. **30.** $a \cdot b = 672 : (1 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4) = 12$ şi $a = 3$, $b = 4$; $a = 4$, $b = 3$; $a = 6$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 6$. **31.** $a + b = 7$ şi se rezolvă analog cu **28.**
32. a) Cel puţin una din cifre trebuie să fie zero; 10573, 21074, 32540; **b)** produsul este maxim dacă cifrele sunt maxime ⇒ 98765 şi 56789. **33.** Analog **28.** **34. a)** 68370, 29570, 37150, 48500, 53280; **b)** 68000, 29000, 37000, 48000, 53000; **c)** 68400, 29600, 37200, 48500, 53300; **d)** 69000, 30000, 38000, 49000, 54000; **e)** 68400, 29600, 37200, 48500, 53300; **f)** 68000, 30000, 37000, 49000, 53000.

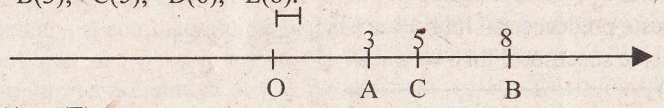
2. Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Ordonarea numerelor naturale

1.



2. A(2); B(3); C(5); D(6); E(8).

3.



p(F); q(A); r(F).

4. $c < a < d < b$.

5.

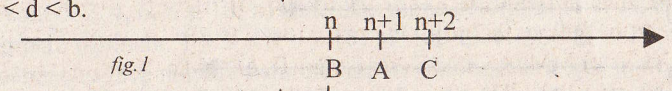


fig.1

sau

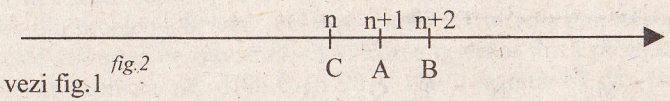


fig.2

Cazul I. vezi fig.1

a) B corespunde unui număr par ⇒ A corespunde unui număr impar şi C corespunde unui număr par.

b) A corespunde unui număr impar ⇒ B şi C corespund la numere pare.

c) C corespunde unui număr impar ⇒ A corespunde unui număr par şi B corespunde unui număr impar.

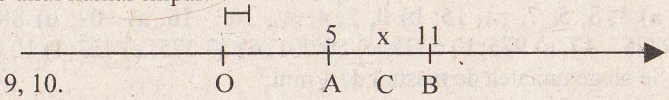
Cazul II. vezi fig. 2

a) B corespunde unui număr par ⇒ A corespunde unui număr impar şi C corespunde unui număr par.

b) A corespunde unui număr impar ⇒ B şi C corespund la numere pare.

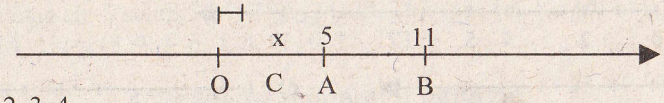
c) C corespunde unui număr impar ⇒ A corespunde unui număr par şi B corespunde unui număr impar.

6. a)



6, 7, 8, 9, 10.

b)



0, 1, 2, 3, 4.

7. A(n); B(n + 1); C(n + 2) şi D(x)

D este între A şi C ⇒ $n < x < n + 2 \Rightarrow x = n + 1$.

8.

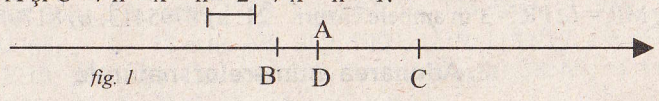


fig. 1

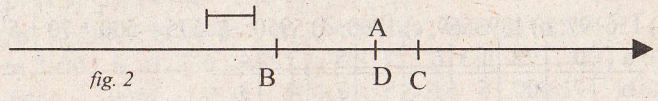


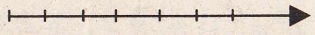
fig. 2

Reprezentarea este ca în fig. 1 sau ca în fig. 2 ⇒ numere care corespund

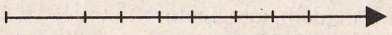
punctelor A și D sunt egale.

9. a este predecesorul lui b $\Rightarrow a < b$
a este succesorul lui c $\Rightarrow c < a$
$\Rightarrow c < a < b$.

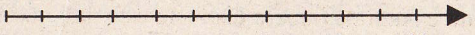
10. a)



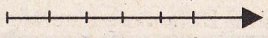
b)



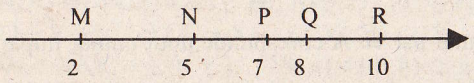
c)



d)

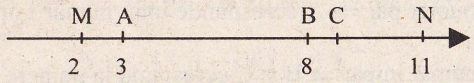


11.

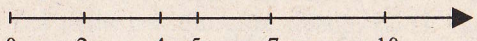


a) MN = 3 cm; MP = 5 cm; MQ = 6 cm; MR = 8 cm; NP = 2 cm; NQ = 3 cm; NR = 5 cm; PQ = 1 cm; PR = 3 cm; QR = 2 cm; **b)** MR + MQ – 2MN = 8 + + 6 – 2 · 3 = 8 cm; 2NP + 3NR – NQ = 2 · 2 + 3 · 5 – 3 = 4 + 15 – 3 = 19 – 3 = = 16 cm; 4QR + 5PQ – 2PR = 4 · 2 + 5 · 1 – 2 · 3 = 8 + 5 – 6 = 13 – 6 = 7 cm.

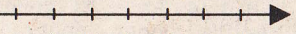
12.



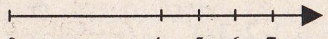
a) 3, 8 și 9; **b)** MB = 6 cm, BC = 1 cm, BN = 3 cm, AN = 8 cm, MN = 9 cm.
13. 57, 128, 156, 235, 349, 463. **14.** 631, 561, 492, 354, 281, 79.
15. a) 1, 3, 5, 7, ..., 15; **b)** 0, 2, 4, ..., 10. **16. a)** 102; **b)** 888; **c)** 1111; **d)** 9875. **17. a)** 975; **b)** 5322; **c)** 50 001; **d)** 43 575; **e)** 423; **f)** 10 011.
18. Se alege unitatea de măsură de 1 mm.
19. a)



b)



c)



20. Coordonatele punctelor P, Q și R sunt: **a)** 3, 5 și 6; **b)** 6, 8 și 9, iar MQ = = 5, MR = 6, PR = 3 în ambele cazuri. **21. a)** 8795413; **b)** 8179543.

3. Adunarea numerelor naturale

1. a) 156197; **b)** 1393569; **c)** 1760; **d)** 5950. **2.** 575 = 500 + 70 + 5 și analog.

3.

a	0	7	1	6	2	5	3	4
b	7	0	6	1	5	2	4	3

4. a) 200; **b)** 4429; **c)** 100; **d)** 450; **e)** 300; **f)** 4700; **g)** 6000; **h)** 1500.

5. a) 0 este element neutru la adunare; **b)** comutativitatea; **c)** asociativitatea; **d)** asociativitatea și comutativitatea. **6.** 26779; 49308; 39679; 73611; 117950. **7.** 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 18. **8. a)** Calculăm suma celor mai mici 6 numere naturale pare distincte: 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30. Suma oricăror alte șase numere naturale pare distincte este mai mare decât 30. Deci numerele sunt 0, 2, 4, 6, 8 și 10; **b)** Calculăm suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100. Suma oricăror alte zece numere naturale impare distincte este mai mare decât 100. Deci numerele sunt: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. **9.** Conform rezultatului din problema **8**, suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte este 100 ceea ce înseamnă că valoarea cea mai mică posibilă dacă numerele sunt distincte este 100. Cum 98 < 100 înseamnă că numerele nu sunt distincte toate deci cel puțin două din ele sunt egale. **12.** Se folosesc proprietățile adunării. **13. a)** 3240; **b)** 2550; **c)** 2500; **d)** 253. **14.** Se folosește problema rezolvată și obținem: **a)** 668334; **b)** 501000; **c)** 401000; **d)** 287287; **e)** 119357. **16.** a) 1 500; b) 3 350; c) 11 000; d) 2 520; e) 6 990; f) 626. **17.** a) 500; b) 1 000; c) a sau b; d) a + b; e) 600; f) rămâne neschimbată. **18.** a) 5 000; 6 000; b) 7 000; 8 000; c) 2 000; 3 000; d) 19 000; 20 000; e) 35 000; 36 000; f) 54 000; 55 000. **19.** a) 2 000; b) 4 000; c) 9 000; d) 20 000; e) 115 000; f) 33 000. **20.** a) 196 621 970; b) 196 621 000; c) 196 622 000. **21.** p(F); q(A); r(A). **22. a)** c = nr. par; **b)** c = nr. impar; **c)** b = nr. par; **d)** b = nr. impar. **23. a)** 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, ...; **b)** 132; **c)** 555. **24.** $9 + 99 + 999 + \ldots\ldots + \underbrace{99\ldots9}_{1998} = 10 - 1 + 100 - 1 + + 1000 - 1 +$

$\ldots + 1\underbrace{0\ldots\ldots0}_{1998} - 1 = \underbrace{11\ldots\ldots10}_{1998} - 1998 = \underbrace{11\ldots\ldots}_{1994}109112$.

25. Problema are 5 soluții: (37; 38); (24, 25, 26); (13, 14, 15, 16, 17); (10, 11, 12, 13, 14, 15) și (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12).

4. Scăderea numerelor naturale. Paranteze; ordinea efectuării operațiilor

1. a – b este: 300, 220, 1020, 1330, 118 940; a – 325 este 211, 950, 3098, 11 112, 131 765; a – b – 11 este: 289, 209, 1009, 1319, 118 929; a + b – 120 este: 654, 2210, 5706, 21 424, 145 220. **2. a)** 1896; **b)** 38569; **c)** 44254; **d)** 20437; **e)** 133000; **f)** 15018. **3.** p(A); q(A); r(A).
4. a) 10224; **b)** 3776009; **c)** 567552; **d)** 238756; **e)** 54053; **f)** 88354.
5. a) 5175; **b)** 31000. **6. a)** (530 – 439) – (348 – 257); **b)** (880 – 661) – (631 – – 412); **c)** (6464 – 5008) – (3552 – 2096); **d)** 24860 – (35765 – 15680) – – 4775; **e)** (1237 – 1237) – (15285 – 12960 – 1185 – 1140); **f)** 56470 –

– (80514 – 9040 – 13001 – 2003). **7.** 813 137; 8 000; 17 125; 45 834; 33 723; 714 125. **8. a)** a + b + c + d = 1241; **b)** a – b + c – d = 195. **9.** 98765 – 10234 = 88531. **10.** 73. **11.** 91577. **12. a)** 2578; **b)** 599; **c)** 11589; **d)** 2320. **13. a)** x > y; **b)** x < y; **c)** x = y; **d)** x = y; **e)** x = y. **14. a)** 316; **b)** 10484. **15. a)** 7394 – 5836 = 1558; **b)** 4173 – 2859 = 1314. **16.** 31 – 13 = 18; 42 – 24 = 18; 53 – 35 = 18; 64 – 46 = 18; 75 – 57 = = 18; 86 – 68 = 18; 97 – 79 = 18.

17.

p = nr. par
i = nr. impar

a	b	a + b	a – b
p	p	p	p
p	i	i	i
i	p	i	i
i	i	p	p

Din tabel rezultă că suma şi diferenţa au aceeaşi paritate. Deci nu există numerele. **18.** 98765 – 10234 = 88531. **19.** p(F); q(A). **20.** Cum a + b = = 1973 ⇒ a, b au parităţi diferite. Cum b – c = 1547 ⇒ b, c au parităţi diferite ⇒ a, c au aceeaşi paritate ⇒ a – c ≠ 147. Deci nu există astfel de numere. **21. a)** 141 000 lei; **b)** 222 000 lei. **22.** 31 371; **23.** Bucureşti-Deva 389 km, Oneşti-Deva 381 km şi distanţa totală 770 km. **24.** a) a = 680, b = 600; b) a = 250, b = 450; c) a = 500, b = 500.

5. Ecuaţii, inecuaţii şi probleme care se rezolvă cu operaţii de adunare şi scădere

1. a) 2900; **b)** 33184; **c)** 11356; **d)** 12109; **e)** 7242; **f)** 35812; **g)** 38; **h)** 235; **i)** 295. **2. a)** toate; **b)** toate; **c)** nici unul. **3. a)** 139; **b)** 11765; **c)** 792; **d)** 3817; **e)** 4210; **f)** 2652. **4. a)** 38; **b)** 6836; **c)** 140; **d)** 220; **e)** 361; **f)** 979. **5. a)** 187; **b)** 3; **c)** 509; **d)** 258; **e)** 5; **f)** 419; **g)** 88; **h)** 11; **i)** 1; **j)** 109. **6.** a) 20; b) 190; c) 0; d) 5; e) 101; f) 410; g) 90; h) 75; **7.** a) 0, 2, 3; b) nici unul; c) 2; d) 2; e) şi f) nici unul; **8. a)** 0, 1, 2, 3; **b)** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; **c)** 0, 1, 2, 3; **d)** 0, 1, 2, 3, 4; **e)** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. **9.** 280, 281, ..., 335. **10. a)** x ≥ 54; **b)** x > 158; **c)** x ≤ 14; **d)** x < 124; **e)** x < 3; **f)** x < 267. **11. a)** 15, 16, ..., 30; **b)** 223, 224, ..., 249; **c)** 125, 126, ..., 137; **d)** 0, 1, 2, ..., 5; **e)** 37, 38, ..., 127; **f)** 50, 51, ..., 125. **12.** a) 97, 98...; b) 0, 1, ..., 30; c) 0; d) x ≤ 30; e) x < 8; f) x ≤ 4. **13.** 372. **14.** 7 210. **15.** 199552. **16.** 16, 61, 25, 53, 34, 43. **17.** a = 16; b = 12; c = 4. **18.** 119; 73. **19.** 297; 176. **20.** c = 17. **21.** x = 50. **22.** 27000; 31000; 20000; 28000 (lei). **23.** 81; 1690. **24. a)** 124, 125, ..., 325; **b)** 14, 15, ..., 377; **c)** 20, 21, 22, ..., 50.

6. Înmulţirea numerelor naturale

1. a) 170; **b)** 203000; **c)** 100700; **d)** 747; **e)** 72560; **f)** 15225; **g)**1668634. **3. a)** 89700; **b)** 9037000; **c)** 8100; **d)** 67200; **e)** 82900; **f)** 9300; **g)** 2000; **h)** 0. **4. a)** 540; **b)** 1305; **c)** 6165; **d)** 105930; **e)** 618255. **5. c), h)** false. **6.** 25, 36, 49, 64, 81. **7.** 29028. **8.** (1, 12); (2, 6); (3, 4). Problema are 3 soluţii. **9.** p(F); q(A). **11. a)** 261; **b)** 3439; **c)** 0; **d)** 538. **12.** 345. **13.** 120. **14.** 30. **15.** 15. **16.** 15. **17.** 31. **18.** 301. **19.** 10. **20.** (a = 1; b = 14); (a = 3; b = = 4); (a = 5; b = 2); (a = 15; b = 0). **21. a)** 320; **b)** 159; **c)** 161; **d)** 164. **22. a)** 8; **b)** 225; **c)** 1; **d)** 78. **23.** 5. **24.** a) efectuând calculele sau folosind „distributivitatea înmulţirii faţă de adunare" şi se obţine 1 500; b), c), d), e) se efectuează calculele sau se scoate factor comun şi se obţine: 1 680; 1 400; 18 900; 11 900. **25.** a) 2·18; b) 6·6; c) 2·3·6. **26.** a = 5 şi b = 7. **27.** 7 şi 8. **28.** 10 540. **29.** a) 9; b) 58; c) 40; d) 40. **30.** *1.* a) 16 422; b) 6 250; c) 244 110; d) 433 070; *2.* a) 6 430; b) 6 260; c) 244 120; d) 433 080; *3.* a) 6 400; b) 6 200; c) 244 100; d) 433 000; *4.* a) 16 000; b) 6 000; c) 244 000; d) 433 000.

7. Ecuaţii, inecuaţii şi probleme care se rezolvă cu operaţiile studiate

1. a) 6; **b)** 5; **c)** 10; **d)** 1; **e)** 2. **2. a)** 0, 1, 2; **b)** 0, 1, 2, 3, 4, 5; **c)** 0, 1, 2, 3; **d)** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. **3.** 5. **4.** 10. **5.** Mihai are 4500 lei şi Sandu are 1500 lei. **6.** 197. **7.** a = 10; b = 5. **8.** a = 2; b = 5. **9.** un creion 2 500 lei, un caiet 10 000 lei. **10.** 18 000 lei. **11.** Adevărate. **12. a)** 10, 13, 16, 19, 22; **b)** Da, pentru n = 123. **13. a)** 1129; **b)** 5. **14.** 140. **15. a)** 2001000; **b)** 4002000; **c)** 20010000; **d)** 200100000. **16.** a = 1, c = 9, b poate fi 2, 3, 4, 5, 6, 7 sau 8. **17. a)** 312; **b)** 500; **c)** 813; **d)** 100; **e)** x < 10; **f)** x < 5; **g)** x < 3; **h)** x < 5. **18.** 128. **19.** 42 de fete şi 84 de băieţi. **20. a)** x = 5; **b)** x = 9; **c)** x = 1.

8. Împărţirea numerelor naturale

1. a) 68; **b)** 926; **c)** 115; **d)** 85; **e)** 624; **f)** 205; **g)** 305; **h)** 21140; **i)** 1054; **j)** 504; **k)** 5610; **l)** 29; **m)** 502; **n)** 308; **o)** 29. **2. a)** 73 (rest 14); **b)** 2816 (rest 95); **c)** 143 (rest 9); **d)** 58 (rest 240); **e)** 58 (rest 24); **f)** 211 (rest 0); **g)** 197 (rest 60); **h)** 85 (rest 17); **i)** 40 (rest 88). **3.** False a), b), c) şi d). Adevărate e) şi f). **4. a)** ***Cazul 1.*** Dacă restul împărţirii şi împărţitorul sunt numere consecutive, atunci câtul creşte cu o unitate şi restul este 0. ***Cazul 2.*** Dacă restul împărţirii şi împărţitorul nu sunt numere consecutive, atunci câtul rămâne neschimbat şi restul creşte cu o unitate; **b)** ***Cazul 1.*** Dacă restul împărţirii este 1, atunci câtul rămâne neschimbat şi restul devine 0. ***Cazul 2.***

Dacă restul este diferit de 1, atunci câtul rămâne neschimbat și restul se micșorează cu 1; **c)** Atât câtul și restul se măresc de același număr de ori; **d)** Câtul rămâne neschimbat iar restul se mărește de același număr de ori. **5.** 402. **6.** 60, 61, 62, 63, 64. **7.** 8, 16, 24, 32, 40, 48. **8.** 7226. **9.** 3 sau 4. **10. a)** 9939; **b)** 1028; 134; 734789. **11.** 2. **12.** 1. **13.** a = 4 și b = 15. **14.** Prin împărțire la 6 ar da resturile 4 și 2. **15.** 9982 și 1033. **16.** $6 = 2 \cdot 3 + 0$; $7 = 2 \cdot 3 + 1$; $7 = 3 \cdot 2 + 1$; $8 = 3 \cdot 2 + 2$. **17.** 295 de pagini. **18.** Restul este 4. **19.** 6391. **20.** 87. **21.** 65 și 21. **22. a)** „<"; **b)** „>"; **c)** „>"; **d)** „<".

9. Ordinea efectuării operațiilor

1. a) 11667; **b)** 549; **c)** 655278; **d)** 5575; **e)** 427; **f)** 3078; **g)** 463900; **h)** 31134. **2.** a = b. **3. a)** 2; **b)** 1. **4. a)** 4219; **b)** 8229; **c)** 1037575; **d)** 15; **e)** 17243. **5. a)** și **b)** false; **c)** adevărată. **6.** x = 1200, y = 177, z = 400, t = 1062, $x \cdot y = 212400$, x + y = 1377, iar $x \cdot y - (x + y) = 211023$. **7. a)** 450; **b)** 65742; **c)** 700; **d)** 20; **e)** 45. **8. a)** 0, 1, 2, 3; **b)** 0, 1, 2, ..., 18; **c)** 2, 3, ...; **d)** 10, 11, ..., 30. **9.** (1,5) și (5,1). **10.** 21 indiferent de valorile lui a, b, c. **11. a)** 8004; **b)** 2002^2; **c)** 200100. **12.** Se consideră cazurile x par, adică x = 2k și x impar, adică x = 2k + 1 și se calculează (3x + 2)(x + 3). **13. a)** 48; **b)** 1380; **c)** 1708; **d)** 16290; **e)** 217136. **14. a)** c = 50, b = 60, a = 40; **b)** c = 7, b = 57, a = 27. **15. a)** 75; **b)** 303; **c)** 168; **d)** 1425. **17. a)** 50; **b)** 5520; **c)** 3; **d)** 33000. **18. a)** 250; **b)** 0; **c)** 20. **19. a)** $17 \cdot 105 + 17 \cdot 95 = 1785 + 1615 = 3400$ sau $17(105 + 95) = 17 \cdot 200 = 3400$; **b), c), d)** și **e)** analog **a)**. **20. a)** x = 1; **b)** x = 1991. **21.** a) 55; b) 100; c) 560; d) 920; e) 42; f) 99; g) 90 836. **22.** a) $x \leq 7$; b) $x \leq 2$; c) $x < 21$ și $x > 14 \Rightarrow$ x este: 15, 16, 17, 18, 19, 20; d) $x \leq 9$ și $x \geq 3 \Rightarrow$ x este: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; e) $x \geq 7$ și $x \leq 2 \Rightarrow$ nu există nici un număr natural care să verifice relațiile; f) $x < 1$ și $x < 5 \Rightarrow x = 0$; g) $x \leq 22$; h) 9 și 10. **23.** a) 105; b) 8 085; c) 64 521; d) 1 953; e) 2 001; f) 17 343; g) 1 221 696; h) 10; i) 31 416; j) 78 078. **24.** a) 147; b) 27; c) 32; d) 576; e) 392.

10. Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5

1. Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Divizorii lui 27 sunt: 1, 3, 9, 27, ai lui 31 sunt 1 și 31. **2.** 1, 2, 4, 5, 10. **3.** 6. **4.** 2. **5.** 1, 2, 3 și 6. **6.** 4. **7.** 1, 15, 21, 35 sau 15, 21, 35, 105. **8.** 1, 2, 3 sau 2, 3, 4. **9.** $a \mid b \Rightarrow b = a \cdot m$, $m \in \mathbf{N}$; $b \mid c \Rightarrow c = b \cdot n$, $n \in \mathbf{N}$. Deci, $c = a \cdot m \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$, $m, n \in \mathbf{N}$ și $a \mid c$. **10.** $a \mid b \Rightarrow a \leq b$, $b \mid a \Rightarrow b \leq a$. Deci, a = b. **11.** 12, 18, 24. **12.** a) 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49; b) 21, 28, 35, 42, 56, 63. **13.** 989. **14.** 1034. **15.** 36, 72, 108. **16.** 18. **17.** 30.

18. a · b. **19. a)** 10, 20, 130; **b)** 10, 15, 20, 95, 130; **c)** 6, 10, 20, 24, 86, 112, 130; **d)** 17. **20. a)** 120, 122, 124, 126, 128; **b)** 300, 310, 320, 330, 340, 350, 360, 370, 380, 390; 315, 325, 335, 345, 355, 365, 375, 385, 395; **c)** 700, 710, 720, 730, 740, 750, 760, 770, 780, 790. **21. a)** 540, 504, 450; **b)** 450, 405, 540; **c)** 540, 450. **22.** 700; 788. **23. a)** 1 170, ..., 9 970; 1 172, ..., 9 972; 1 174, ..., 9 974; 1 176, ..., 9 976; 1 178, ..., 9 970. **24. a)** Din două numere consecutive sigur unul este par și ca urmare produsul lor este număr par. Fie a și a + 1 numerele.

1) Dacă $a = 2k \Rightarrow a + 1 = 2k + 1$ și $a(a + 1) = 2k(2k + 1)$ care este număr par.

2) Dacă $a = 2k + 1 \Rightarrow a + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ și produsul $a(a + 1) = (2k + 1) \cdot 2 \cdot (k + 1) \vdots 2$.

b) Privind divizibilitatea cu 3 un număr poate fi multiplu de 3 sau împărțit la 3 să dea restul 1 sau 2.

1) Fie $a = 3k \Rightarrow a + 1 = 3k + 1$ și $a + 2 = 3k + 2 \Rightarrow P = a(a + 1)(a + 2) = 3k(3k + 1)(3k + 2) \vdots 3$.

2) Fie $a = 3k + 1 \Rightarrow a + 1 = 3k + 2$ și $a + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow P = a(a + 1)(a + 2) = (3k + 1)(3k + 2) \cdot 3 \cdot (k + 1) \vdots 3$.

3) Fie $a = 3k + 2 \Rightarrow a + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ și $a + 2 = 3k + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow a(a + 1)(a + 2) = (3k + 2) \cdot 3(k + 1) \cdot (3k + 4) \vdots 3$.

Deci indiferent de forma lui a produsul $P = a(a + 1)(a + 2)$ este un multiplu al lui 3.

25. a) 456; 738; 124; b) 405; 125; 375. **26.** $x = 3(a + 2b) \Rightarrow x \vdots 3$.

27. $x = 4(a + 2b + 3) \Rightarrow x \vdots 4$. **28.** Oricum am considera cinci numere naturale consecutive, unul este divizibil prin 2 și unul este divizibil prin 5. Deci, produsul lor este divizibil prin 10. **29.** Oricum am alege 6 numere naturale, există printre ele cel puțin două numere care prin împărțire la 5 dau același rest. Deci, diferența lor este un număr divizibil prin 5. **30.** $d \mid a \Rightarrow a = dm$, $m \in \mathbf{N}$; $d \mid b \Rightarrow b = dn$, $n \in \mathbf{N}$. Avem: $a + b = dm + dn = d(m + n)$ și $(a + b) \vdots d$, iar $a - b = dm - dn = d(m - - n)$ și $(a - b) \vdots d$. **31.** $d \mid a \Rightarrow a = dm \Rightarrow ba = bdm = d(bm)$. Deci, $d \mid ba$.

32. $a \mid b \Rightarrow a \mid db$; $a \mid c \Rightarrow a \mid ec \Rightarrow a \mid (db + ec)$ și $a \mid (db - ec)$.

33. $d \mid (a + b)$; $d \mid a \Rightarrow d \mid (a + b - a) \Rightarrow d \mid b$.

34. $\left.\begin{array}{l} ab \vdots a \Rightarrow (a+b) \vdots a \\ a \vdots a \end{array}\right\} \Rightarrow b \vdots a$

$\left.\begin{array}{l} ab \vdots b \Rightarrow (a+b) \vdots b \\ b \vdots b \end{array}\right\} \Rightarrow a \vdots b$

$\Rightarrow a = b \Rightarrow a + a = a \cdot a \Rightarrow a \cdot a - 2a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(a-2)=0 \Rightarrow a=0$ sau $a=2 \Rightarrow a=b=0$ sau $a=b=2$.

35. $1+2+3+4+6+7+8+9=10+30=40$. Deci, suma celor mai mici opt numere naturale nenule distincte nedivizibile prin 5 este mai mare decât 39, ceea ce înseamnă că unul din ele este divizibil prin 5 şi produsul lor este divizibil prin 5.

11. Numere pare şi numere impare

1. a) 16, 24, 40, 3004; **b)** 29, 53, 71, 121. **2.** a) 11; b) 502; c) 12 369; **3. a)** 11; **b)** 221; **c)** 4 631; **4.** 3 916 913; **5.** a) 324, 326, 328; b) 571, 573, 575. **6.** $7+8=15$. **7.** $12+14=26$. **8.** $17+19=36$. **9.** 6, 8, 10, 12, 14. **10.** 11, 13, 15, 17, 19, 21. **11.** 2 şi 74. **12.** 2 şi 369. **13.** $x=2(a+3b) \Rightarrow x=$ nr. par şi $y=2(2a+5b+8)+1 \Rightarrow y=$ nr. impar. Deci, **a)** par; **b)** impar; **c)** impar; **d)** par; **e)** par; **f)** par; **g)** par. **14.** $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20=110$. Deoarece sunt cele mai mici 10 numere naturale pare nenule distincte şi suma lor este 110, înseamnă că acestea sunt numere cerute. **15.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale pare nenule distincte este 110 şi $108<110$, rezultă că cel puţin două din cele 10 numere sunt egale. **16.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale pare nenule distincte este 110 şi cel mai mare dintre ele este 20, iar $112>110$, înseamnă că cel puţin unul din numere este mai mare decât 20 căci în caz contrar suma lor ar fi 110. Cu atât mai mult, cel mai mare dintre ele este mai mare decât 20. **17.** $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$. Cum sunt cele mai mici 10 numere naturale impare distincte şi suma lor este 100, înseamnă că acestea sunt numerele cerute. **18.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte este 100 şi $96<100$, înseamnă că printre ele cel puţin două sunt egale. **19.** Cum suma primelor 10 numere naturale impare distincte este 100 şi cel mai mare dintre ele este 19, iar $102>100$, înseamnă că nu pot fi toate mai mici sau egale cu 19. Deci, cel mai mare dintre ele este mai mare decât 20. **20.** Suma a 15 numere pare este un număr par. Deci, nu există. **21.** Suma a 12 numere naturale impare este un număr par. Deci, nu există. **22.** Cum suma primelor două numere este un număr impar, înseamnă că sunt de parităţi diferite, deci unul din ele este număr natural par. Cum suma ultimelor trei numere este un număr par, înseamnă că nu pot fi toate impare şi deci unul din ele este număr natural par. Cum două din cele 5 numere sunt pare, înseamnă că produsul lor se divide prin 4. **23.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte este 100 şi $98<100$, înseamnă că cel puţin unul din numere este par. Deci, produsul lor este un număr par. **24.** 26 şi 28 sau 16, 18, 20 sau 4, 6, 8, 10, 12, 14. **25.** par. **26.** impar. **27.** par. **28.** nu. **29.** nu. **30.** $a=b=c=2$.

31. $a=2, b=42, c=17$. **32.** $a=2, b=5, c=7$.

12. Ridicarea la putere. *Reguli de calcul cu puteri

1. a) 16; 27; 343; 64; 1; 1; 625; 2 003; 1331; 144; 1 000; 10 201; 28^9; 125; 128; 2 025; 4 489; 121; **b)** 33; 1; 400; 16; 62; **c)** 2^2; 2^8; 2^4; 2^0; 2^3; 2^4; 2^9; 2^{40}; **d)** 3^0; 3^4; 3^2; 3^{15}; 3^{32}; 3^{56}. **2. a)** 2^6; **b)** 5^{19}; **c)** 3^{10}; **d)** 2^{22}; **e)** 47^8; **f)** 5^{10}; **g)** 153; **h)** 912; **i)** 2; **j)** 15. **5. a)** 2^{38}; **b)** 3^{187}; **c)** 7^{103}; **d)** 2^8; **e)** 5^{36}; **f)** 2^{34}; **g)** 3^{50}; **h)** 10^{33}; **i)** 2^{85}; **j)** 10^{180}; **k)** 2^{167}; **l)** 3^{18}; **m)** $3^{14}\cdot 5^{24}$; **n)** $2^{40}\cdot 3^3$; **p)** 8; **r)** $2^{16}\cdot 3^{62}$. **6. a)** 1; **b)** 1. **7. i)** A; **ii)** A; **iii)** A. **8. i)** A; **ii)** A. **9.** $x=3; y=4$; $x=4; y=3$. **10.** $x=2; y=3; z=4$ şi toate combinaţiile posibile (permutări). **11.** $x=4; y=3; z=2$. **12. a)** $x=3$; **b)** $x=3$; **c)** $x=1$. **13.** Adevărată. **14.** $a=b$ (A). **15.** Adevărată. **16.** $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9$. **17. a)** 342; **b)** 0; **c)** 1; **d)** 1; **e)** 460; **f)** 5. **18. a)** 2; **b)** 6; **c)** 2; **d)** 1; **e)** 3; **f)** 5; **g)** 128; **h)** 0. **19. a)** $4^4\cdot(4+4^4-1)$; **b)** $3^3\cdot(1+2^5\cdot 3^2+3^1)$; **c)** $x^2\cdot(1+x+x^2)$; **d)** $5^3\cdot(6+5\cdot 7)$; **e)** $xy\cdot(3x+2y++4)$; **f)** $7^2\cdot(7^3\cdot x+7^2\cdot y+z)$; **g)** $5^3\cdot(5^3\cdot 4x+5\cdot 4y+7z)$. **20. a)** 1; **b)** 3; **c)** 3; **d)** 2. **21. a)** 1; **b)** 224; **c)** 21000; **d)** 5^{10}. **22. a)** 6; **b)** 49; **c)** 1000; **d)** 1; **e)** 157; **f)** 1.

13. Compararea şi ordonarea puterilor. Reguli de comparare

1. a) $2^{17}<2^{31}$; **b)** $5^{83}<5^{101}$; **c)** $101^{23}<101^{75}$; **d)** $5^{23}<7^{23}$; **e)** $5^{47}<11^{47}$; **f)** $2^{38}<3^{38}$; **g)** $5^{17}<7^{21}$; **h)** $2^{13}<3^{19}$; **i)** $23^{41}<41^{59}$; **j)** $1^{107}=1^{203}$; **k)** $0^{43}=0^{83}$; **l)** $\left(7^{23}\right)^0<7^{23^0}$; **m)** $\left(7^0\right)^{23}=\left(5^{31}\right)^0$; **n)** $\left(2^3\right)^2<2^{3^2}$; **p)** $2^{37}\cdot 3^{59}<2^{41}\cdot 3^{61}$. **2. a)** $2^{53}<4^{29}$; **b)** $9^{51}<3^{103}$; **c)** $8^{31}<4^{47}$; **d)** $9^{24}=27^{16}$; **e)** $25^{61}<125^{43}$; **f)** $100^{19}<10^{43}$. **3. a)** $2^{30}<3^{20}$; **b)** $5^{34}<3^{51}$; **c)** $3^{93}<2^{155}$; **d)** $2^{111}\cdot 5^{38}<3^{131}$; **e)** $10^{74}<6^{123}$. **4.** $2^{302}<3^{203}$. **5.** $2^{87}+2^{86}+2^{85}>5^{35}+5^{34}$. **6.** $2^{3n+1}-8^n<3^{2n+1}-9^n$. **7. a)** $5+5^2+5^3+\ldots+5^{50}<2^{2975}$; **b)** $5\cdot 5^2\cdot 5^3\cdot\ldots\cdot 5^{50}<2^{2975}$. **8.** $33^3<3^9<3^{3^3}<3^{33}$. **9.** Are 10 cifre. **10.** A = B. **11. a)** egale; **b)** $2\cdot 3^{38}=2\cdot(3^2)^{19}=2\cdot 9^{19}$ şi $2^{58}=2\cdot 2^{57}=2\cdot 2^{3\cdot 19}=2\cdot(2^3)^{19}$. **12. a)** $x<y$; **b)** $x>y$. **13. a)** $3^{12}>2^{18}>7^5$; **b)** $36^{17}>32^{17}>9^{17}\Leftrightarrow 2^{102}>6^{34}>3^{51}$; **c)** $32^{16}>25^{16}>8^{16}\Leftrightarrow 16^{20}>25^{16}>2^{48}$; **d)** $9^2\cdot 9^{26}>9\cdot 9^{26}>3\cdot 7^{26}\Leftrightarrow 9^{28}>3^{54}>7^{26}(7-4)$. **14. a)** $9^{16}<(3^9)^4<(3^{13})^3\Leftrightarrow 3^{32}<3^{36}<3^{39}$; **b)** $\left(\left(2^2\right)^5\right)^3<2^6\cdot 2^{11}\cdot 2^{14}<(2^2)^{30}\Leftrightarrow 2^{30}<2^{32}<2^{60}$. **15. a)** $x<6$; **b)** $x=0$; **c)** $x<6$; **d)** nu are soluţie; **e)** $x=2$; **f)** $x<4$; **g)** $x=0$; **h)** $x=1$; **i)** $x=2$. **16.** $2^2, 8, 4^2, 2^5, 2^7$. **17. a)** $>$; **b)** $<$; **c)** $=$; **d)** $=$; **e)** $=$. **18. a)** $3^{40}, 7^{20}, 25^{10}, 2^{60}$.

19. c. **20.** **a)** $2^{2^3} > \left(2^2\right)^3$; **b)** $3^{2^3} > \left(3^2\right)^3$; **c)** $3^{38} > 2^{59} - 2^{58} - 2^{57}$; **d)** $9^{40} = 81^{20}$.

14. Pătratul şi cubul unui număr natural. *Pătrate perfecte

1. $4^3 = (2^3)^2$; $4^0 = 1^2$; $81 = 9^2$; $3^{12} = (3^6)^2$; $9^{2003} = (3^{2003})^2$; $5^{2p} = (5^p)^2$; $10^{6p} = (10^{3p})^2$. **2.** $27 = 3^3$; $64 = 4^3$; $5^{48} = (5^{16})^3$; $7^{225} = (7^{75})^3$; $11^{2001} = (11^{667})^3$. **3.** a) $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; b) $1^3 = 1$, $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$. **4.** $2\,003^2 - 2\,003 - 2\,002 = 2\,003\,(2\,003 - 1) - 2\,002 = 2\,003 \cdot 2\,002 - 2\,002 = 2\,002(2\,003 - 1) = 2\,002 \cdot 2\,002 = 2\,002^2$. **5.** $2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 \cdot 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \underbrace{2^2 + 2^2} + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \underbrace{2^3 + 2^3} + 2^4 + 2^5 = 2 \cdot 2^3 + 2^4 + 2^5 = \underbrace{2^4 + 2^4} + 2^5 = 2 \cdot 2^4 + 2^5 = 2^5 + 2^5 = 2 \cdot 2^5 = 2^6 = (2^3)^2 = 8^2$ care este pătrat perfect. Se putea arăta şi prin calcul direct.

6. $10^2 = 6^2 + 8^2$; $13^2 = 12^2 + 5^2$. **7.** $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$.

8. a)

U(a)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U(a^2)	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

9. Folosind formula $1 + 2 + 3 + \ldots + n = [n(n + 1)] : 2$ se calculează $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2n + 1] - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) = (2n + 1)(2n + 2) : 2 - 2(1 + 2 + \ldots + n) = (2n + 1)(n + 1) - 2n(n + 1) : 2 = (2n + 1)(n + 1) - n(n + 1) = (n + 1)(2n + 1 - n) = (n + 1)(n + 1) = (n + 1)^2$ adică $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n + 1 = (n + 1)^2$ (este pătrat perfect) şi avem:

a) $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot 5 + 1) = (5 + 1)^2 = 6^2$;

b) $1 + 3 + \ldots + (2 \cdot 9 + 1) = (9 + 1)^2 = 10^2$;

c) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot 49 + 1) = (49 + 1)^2 = 50^2$.

10. $U(2^{2002}) = U(2^{4 \cdot 500 + 2}) = U(2^2) = 4$; $U(3^{2003}) = U(3^{4 \cdot 500 + 3}) = U(3^3) = 7$; $U(4^{2001}) = U(4^{2 \cdot 1000 + 1}) = U(4^1) = 4$; $U(5^{2004}) = 5$; **11.** 64.

12. **a)** $U(2^{1981}) = 2$; **b)** $U(3^{483}) = 7$; **c)** $U(97^{143}) = 3$; **d)** $U(1998^{781}) = 8$; **e)** $U(3^{83} + 8^{68}) = 3$. **13.** Ultima cifră este 8. **14.** Ultima cifră este 7. **15.** Se scrie $5^{17}(5^{17} + 1)$ ş.a.m.d. **16.** $(5^{47})^2 \cdot (7^{17})^2 = (5^{47} \cdot 7^{17})^2$ = pătrat perfect. **17.** $50 \cdot 51$ este cuprins între 50^2 şi 51^2. **18.** 50^2 = pătrat perfect. **19.** $n(n + 1)$ este cuprins între n^2 şi $(n + 1)^2$. **20.** n^2. **21.** $6^n \cdot 5$ se împarte la 5 şi nu se împarte la 25. **22, 23, 24.** Se află ultima cifră. **25.** Prin împărţire la 4 dă restul 2. **26.** **a)** 100, 144, 400, 900; **b)** 225, 441; **c)** 484, 676, 121. **27.** 169, 196, 961. **28.** Numărul $\overline{xx5} = 225$ şi $2x + 5 = 9$, $x^2 + 5 = 9$, $5x - 1 = 9$ şi deci sunt pătrate perfecte. **29.** Ultima cifră este 2, deci nu este pătrat perfect. **30.** **a)** $n = 6$; **b)** $n = 4$. **31.** $n = 4$. **32.** **a)** $15^2 \le x^2 \le 28^2 \Rightarrow$ există $(28 - 15) + 1 = 14$ pătrate perfecte. **33.** **a)** $n = 100 + 2(99 \cdot 100) : 2 = 100 + 99 \cdot 100 = 100(1 + 99) = 100 \cdot 100 = 100^2$ care este pătrat perfect. **34.** Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi: 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Dacă ultima cifră a unui număr este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul respectiv nu poate fi pătrat perfect.

35. **a)** a, b cifre nenule cu $a < b$ şi $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$ care este pătrat perfect dacă şi numai dacă $a + b = 11$, adică $a = 5$, $b = 6$; $a = 4$, $b = 7$; $a = 3$, $b = 8$; $a = 2$, $b = 9$; **b)** $\overline{aa} + \overline{bb} = 11a + 11b = 11(a + b)$ şi este analog **a)**. **36.** **a)** $\overline{ab} = b^2 \Rightarrow 10a + b = b^2 \Rightarrow 10a = b^2 - b \Rightarrow b(b - 1) = 10 \cdot a \Rightarrow b(b - 1) = 2 \cdot 5 \cdot a \Rightarrow b = 5$ şi $a = 2$; $b = 6$ şi $a = 3$; **b)** analog **37.** 444444 $\vdots$ 3 şi 444444 $\not\vdots$ 9 $\Rightarrow$ 444444 nu este pătrat perfect. **38.** $2^n \cdot 5^{n+2} = 2^n \cdot 5^n \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^n \cdot 5^2 = 10^n \cdot 5^2$. Cum n este par $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow 10^n \cdot 5^2 = 10^{2k} \cdot 5^2 = (10^k \cdot 5)^2$, adică este pătrat perfect oricare ar fi numărul natural par n.

15. Ordinea efectuării operaţiilor

1. **a)** 4; **b)** 4; **c)** 8; **d)** 8; **e)** 3^7; **f)** 4; **g)** 1; **h)** 5; **j)** 5. **2.** **a)** 0; **b)** 4; **c)** 4; **d)** 24; **e)** 0; **f)** 1; **3.** **a)** 7; **b)** 405; **c)** 10; **d)** 1; **e)** 10; **f)** 1; **g)** 1. **4.** **a)** 165; **b)** 1880; **c)** 383; **d)** 19; **e)** 1; **f)** 12; **g)** 11; **h)** 72^n. **5.** Câtul este $18^n + 7$, iar restul este 2. **6.** **a)** $n = 54$; **b)** $n = 3$. **7.** **a)** 0; **b)** 1. **8.** Se foloseşte faptul că $1 + 3 + 3^2 = 13$. **9.** $A = 201002\underbrace{99\ldots99}_{n-3 \text{ cifre}}$. **10.** Ultima cifră a lui a^2 poate fi: 0, 1, 4, 5, 6, 9, iar a numărului $3a^2 + a$ poate fi: 0, 2, 4. **11.** $1001\underbrace{99\ldots99}_{n \text{ cifre}}$. **12.** **a)** 33700; **b)** 10.

13. **a)** 8, 2, 6; **b)** 1, 9, 1; **c)** 6; **d)** 9. **14.** **a)** 20; **b)** 48. **16.** 4. **17.** $x = 1$, $y = 181$ şi $x^y + y^x = 1^{181} + 181^1 = 182$. **18.** **a)** 6; **b)** 1; **c)** 6. **19.** **a)** 4 zerouri; 5 zerouri; **b)** 11 zerouri; **c)** 6. **20.** $x = 6$, $y = 5$ şi $(x - y)^{2000} = 1$. **21.** **a)** 128; **b)** 206. **22.** **a)** adevărată; **b)** falsă.

16. *Istoria evoluţiei sistemelor de scriere a numerelor. *Baze de numeraţie

1. **a)** 2571; **b)** 723; **c)** 52; **d)** 35753; **e)** 750; **f)** 2053; **g)** 57020; **h)** 30530057; **i)** 1001. **2.** **a)** $\overline{abc}$; **b)** $\overline{abcd}$; **c)** $\overline{ab}$; **d)** $\overline{aabcda}$; **e)** $\overline{aba}$; **f)** $\overline{a0bc}$; **g)** $\overline{abc}$; **h)** $\overline{aaa}$; **i)** $\overline{a0bc}$; **j)** $\overline{ababc}$; **k)** $\overline{ab00}$; **l)** $\overline{a0bc}$; **m)** $\overline{aabc}$. **3.** **a)** $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$; **b)** $2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7$; **c)** $5 \cdot 10 + 3$; **d)** $2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$; **e)** $7 \cdot 10^2 + 5$; **f)** $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10$; **g)** $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10 + 5$; **h)** $7 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2$. **4.** **a)** $100a + 10b + c$; **b)** $10a + b$; **c)** $1000a + 100b + 10c + d$; **d)** $100a + 10a + b$; **e)** $1000a + 100a + 10a + a$; **f)** $100a + b$; **g)** $10000a + 1000b + 10c + d$; **h)** $100000a + 10000a + 1000b + 10c$; **i)** $1000a + 100b + 10a + b$;

j) 1000000a + 10000b + c. **5. a)** 37; **b)** 523; **c)** 5271; **d)** 30142700; **e)** 7050003000. **6. a)** 10111_2; **b)** 100101_2; **c)** 101110_2; **d)** 11000_2; **e)** 1001000_2; **f)** 1111101_2. **7. a)** 3; **b)** 11; **c)** 12; **d)** 25; **e)** 23; **f)** 109; **g)** 19.

8. a) $222_{(3)} < 444_{(5)} < 777_{(8)}$; **b)** $1011_{(2)} = 11_{(10)}$; $312_{(4)} = 54_{(10)}$, $2021_{(3)} = 61_{(10)}$ $\Rightarrow 1011_{(2)} < 312_{(4)} < 2021_{(3)}$; **c)** $3185_{(9)} = 2345_{(10)}$; $445_{(7)} = 817_{(10)}$; $241_{(5)} = 71_{(10)} \Rightarrow 241_{(5)} < 445_{(7)} < 3185_{(9)}$. **9. a)** x = 5; **b)** x = 3; **c)** x = 7; **d)** x = 5; **e)** x = 3; **f)** x = 5. **10.** $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. **11.** 48, 36, 24, 12. **12.** Toate sunt adevărate. **13.** 10; 14; 23; 32; 41. **14.** 56, 57. **15.** 10; 12; 21. **16.** a = 3. **17.** Fie $\overline{abc}$ cu $a > c \Rightarrow \overline{abc} - \overline{cba} = 9 \cdot 11 \cdot (a-c) = 3^2 \cdot 11 \cdot (a - c)$ este pătrat perfect dacă $a - c = 11^{2k+1}$, ceea ce este absurd deoarece $a - c < 9$. **18.** 51, 62, 73, 84, 95. **19.** $\overline{abc} = 731$. **20.** 1998. **21.** $n = 1 \Rightarrow 5730$; $n = 3 \Rightarrow 573000$; $n = 5 \Rightarrow 57300000$. **22.** 7. **23.** x = 2, y = 3, z = 4. **24.** x = 3. **26.** $2^{37} + 2^{19} > 2^{29} + 2^{23} + 2^{15}$. **27.** falsă.

17. Propoziții adevărate și propoziții false

1. a) predicat; **b)** propoziție; **c)** propoziție; **d)** predicat; **e)** propoziție; **f)** propoziție; **g)** propoziție; **h)** propoziție; **i)** predicat; **j)** predicat; **k)** propoziție; **l)** propoziție. **2. a)** A; **b)** F; **c)** A; **d)** A; **e)** A. **3. a)** $1 + 2 + 3 + \ldots + 101 = 5050$. **4.** A, A. **5.** A, A, F. **6. a)** 22; **b)** 7; **c)** 45; **d)** 4; **e)** 8; **f)** 9; **g)** 10; **h)** 9. **7. a)** 39; **b)** 7; **c)** 15; **d)** 8; **e)** 5. **8.** A, A, A, F, A. **9.** A, F, F. **10.** F. **11. a)** $3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 2 + 1 \cdot 4 = 58 \Rightarrow$ a este adevărată. Analog pentru celelalte; se efectuează calculele și se obține: **e)** falsă și **b), c), d)** adevărate. **12.** Adevărate **b)** și **d)**, false **a)** și **c)**. **13.** Adevărate **a), b), c)**. **14. a)** 12; **b)** 20; **c)** 4950; **d)** >. **15. a)** x < 3; **b)** x < 2; **c)** x > 25; **d)** x = 3; **e)** x = 5; **f)** x = 232. **16.** Adevărate **a), c)** și **e)**; **b), d)** false. **17. a)** F; **b)** A; **c)** A; **d)** F; e) F.

18. „Nu", „și", „sau", „dacă – atunci"

1. a) p (F); q (A); r (A); $\neg$p (A); $\neg$q (F); $\neg$r (F); **b)** $p \wedge q$ (F); $p \vee q$ (A); $q \wedge r$ (A); $q \vee r$ (A); $p \vee \neg q$ (F); **c)** $q \to r$ (A); $q \to p$ (F); $p \to r$ (A); $\neg r \to p$ (A).
2. a) (F); (A); **b)** (F); (A); **c)** (A); **d)** (F). **3.** $\neg$p: „există x număr natural pentru care $3(x + 7) \neq 3x + 15$"; $\neg$q: „$2x - 3 \neq x$, oricare ar fi x număr natural"; $\neg$r: „$0 : 7 \neq 0$ sau $5^2 \not< 3^3$"; $\neg$s: „$2^x \cdot 2^y \neq 2^{x+y}$ și $(3^x)^2 \neq 9^x$".
4. p (A); q (F); r(F);

a) $\left.\begin{matrix} p(A) \\ \neg q(A) \end{matrix}\right] \Rightarrow (p \to q)(A) \left.\begin{matrix} \\ r(F) \end{matrix}\right] \Rightarrow [(p \to q) \wedge r](F) \left.\begin{matrix} \\ \neg q(A) \end{matrix}\right] \Rightarrow [(p \to q) \wedge r] \to \neg q(A).$

b) (A); **c)** (A).

5. a)

p	q	$\neg$p	$\neg$q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
A	A	F	F	A	F	F
A	F	F	A	F	A	A
F	A	A	F	F	A	A
F	F	A	A	F	A	A

b)

p	q	$\neg$p	$\neg$q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
A	A	F	F	A	F	F
A	F	F	A	A	F	F
F	A	A	F	A	F	F
F	F	A	A	F	A	A

6. a) adevărată; **b)** falsă. **7. a)** 0, 1, 2, …, 9; **b)** 11, 12, 13, 14.
8. a) Numărul 2310 nu se divide cu 6; **b)** „Cel mai mare număr natural de două cifre care este pătrat perfect nu este 81"; **c)** „Orice număr natural care are ultima cifră 2 este pătrat perfect". **9.** a) a = 2 sau a = 3; b) a = 0 sau b = 5; c) a = 0 sau b = 20; d) a = 25 sau b = 44. **10. I.** d), **II.** a), b) sau c). **11.** p (F), q (F) deoarece pentru x = 2, y = 4 avem $x^y - y^x = 0$; r (F). **12. a)** falsă deoarece produsul a două numere consecutive este totdeauna număr par; **b)** adevărată deoarece $\overline{xy} + \overline{yx} = 10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11(x + y)$; **c)** falsă deoarece $5^n + 5^n = 2 \cdot 5^n \neq 5^{n+1}$. **13. a)** $p \wedge q$: „Numărul 4 este număr par sau numărul 4 este număr impar"; $p \vee q$: „Numărul 4 este număr par și numărul 4 este număr impar"; $\neg p$: „Numărul 4 nu este număr par"; $\neg q$: „Numărul 4 nu este număr impar"; **b)** A, F, A, F, F, A. **14. a)** Analog **13**; **b)** F, A, A, F. **15. a)** 11, 12, 13, 14; **b)** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; **c)** 16, 36; **d)** 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 27. **16. a)** 25, 18, 11, 4; **b)** 15, 20; **c)** 7, 19, 31, 43. **17.** A, A, F. **18.** F, A, A. **19. a)** F, A, A; **b)** $\neg p_1$: „Există numere naturale care nu sunt pare"; $\neg p_2$: „Nici un număr natural nu este par"; $\neg p_3$: „Orice număr natural este par". **20. a)** F, A, F, A; **b)** Se schimbă „<" cu „>"; „=" cu „≠"; $\neg s$: „Numărul $51 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 50)$ nu este pătrat perfect.

19. Mulțime. Element. Relația de apartenență

1. a) M = {b, i, l, o, t, e, c, ă}; **b)** N = {c, i, n, e, m, a, t, ă}; **c)** P = {a, c, t, u, l, i, ă, ț}. **2. a)** A = {2, 3, 4, 5, 7}, B = {1, 2, 3, 4, 5}, C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}, D = {0, 2, 3, 4, 5, 7}. **3.** M = {0, 1, 2, 3, 4}. **4.** M = {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}. **5.** A = {0, 2, 4, 6, 8}; B = {1, 3, 5, 7, 9}. **6. a)** $a \in A$, $a \notin B$, $a \in C$; **b)** $b \in A$, $b \notin B$, $b \notin C$. **7.** False sunt a), f), m) și restul adevărate. **8.** A = {x | $x \in \mathbf{N}$ și $x \leq 6$}; B = {x | x este cifră pară}; C = {x | x este cifră impară}; D =

$=\{3^x$, unde $x \in \mathbf{N}$ şi $x \leq 5\}$. **9. a)** A; **b)** F; **c)** A; **d)** F; **e)** F; **f)** A; **g)** A; **h)** A. **10.** $B = \{2^0 + 0, 2^1 + 1, 2^3 + 3\} = \{1, 3, 11\}$ şi card B = 3. **11.** F a), d), e). **12.** $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$, $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. **13.** $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{2, 5, 8, 11\}$, $D = \{3, 7, 11\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$. **14.** $A = \{0, 3\}$, $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$, $C = \{3\}$, $D = \{0, 4, 5, 6, 9\}$. **15.** card A = 2001, card B = 1957, card C = 7, card D = 4, card E = 9, card F = 2000. **16.** $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$, $D = \{21, 23, 25, 27, 29\}$, $E = \emptyset$, $F = \{4\}$. **17. a)** A; **b)** A; **c)** A. **18.** x număr par $\Rightarrow A = \{2k, k \in \mathbf{N}\}$. **19. a)** $A = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, $C = \{7, 8, 9, 10, 11\}$; **b)** A = B = C. **20.** $A = \{225, 256, 289\}$, $B = \{100, 121, 144, 169, 196\}$; $C = \{1\}$.

20. Relaţii între mulţimi. Submulţimi

1. a) $\emptyset$, {1}, {2}, {1, 2}; **b)** $\emptyset$, {2}, {3}, {5}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {2, 3, 5}; **c)** $\emptyset$, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}. **3.** {1, 3}; {1, 2, 3}; {1, 3, 5}; {1, 3, 7}; {1, 2, 3, 5}; {1, 2, 3, 7}; {1, 3, 5, 7}. **4.** $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5x = 7\}$; $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 3$ şi $x > 5\}$; $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 1 = 0\}$. **5. a)** $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$; **b)** $A \not\subset B$ şi $B \not\subset A$. **6.** A = B = C. **7. a)** A; **b)** F; **c)** A; **d)** A; **e)** A; **f)** A. **8. a)** card M = 9; **b)** $M_1 = \{11, 21, 31, 41\}$, $M_2 = \{31, 51, 71, 81\}$, $M_3 = \{41, 61, 71, 91\}$; **c)** $M_1 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81\}$, $M_2 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 91\}$, $M_3 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 81, 91\}$, $M_4 = \{11, 21, 31, 41, 51, 71, 81, 91\}$, $M_5 = \{11, 21, 31, 41, 61, 71, 81, 91\}$, $M_6 = \{11, 21, 31, 51, 61, 71, 81, 91\}$, $M_7 = \{11, 21, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$, $M_8 = \{11, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$, $M_9 = \{21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$. **9. a)** $\emptyset$, {0}, {1}, {7}, {0, 1}, {0, 7}, {1, 7}, {0, 1, 7}; **b)** $X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{7\}, \{0, 1\}, \{0, 7\}, \{1, 7\}, \{0, 1, 7\}\}$; **c)** card X = 8. **10. a)** {0, 2, 4, 6, 8}; **b)** $\emptyset$, {2, 4, 6}, {0, 2, 4, 8} (puteţi scrie oricare trei submulţimi); **c)** $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 7\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 15\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 15, 23\}$. **11. a)** $x \in \{2, 4\}$; **b)** $x \in \{1, 5\}$; **c)** $x \in \{6, 7\}$. **12. a)** „$\subseteq$“; **b)** „$\not\subset$“; **c)** „=“. **13.** x = 7. **14. a)** $A \supset B$; **b)** $C \subset A$; **c)** $B \subset D$; **d)** B = E; **e)** $C \subset D$; **f)** $E \subset A$. **15.** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; **a)** A; **b)** A; **c)** A; **d)** A; **e)** A; **f)** A; **g)** F; **h)** F. **16.** Corecte: **a), b), f), h)**. Simbolurile „$\in$“ şi „$\notin$“ se folosesc între element şi mulţime, iar simbolurile „$\subset$“ şi „$\not\subset$“ se folosesc între mulţimi. **17. a)** $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, $C = \{8, 10, 12, 14\}$; **b)** card A = = card B = card C = 4; **c)** Adevărate **1)** şi **3)**. Falsă **2)**. **18.** $4 \leq x^2 < 70 \Rightarrow 2^2 \leq x^2 \leq 8^2 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8 \Rightarrow$ card A = 7; $5 < < x^3 \leq 125 \Rightarrow 2^3 \leq x^3 \leq 5^3 \Rightarrow$ card B = 4. **19. a)** $a > 11$; **b)** $a \in \{8\}$; **c)** $a \in \{5, 6, 7\}$; **d)** $a \in \{2, 3, 4\}$. **20. a)** $A = \{0, 1,$

$2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{3^0, 3^1, 3^2\} = \{1, 3, 9\}$; **b)** Adevărate: $A = B$, $B \neq \neq C$, restul sunt false.

21. Mulţimi finite şi mulţimi infinite. Mulţimile N şi $\mathbf{N}^*$. Mulţimea divizorilor şi mulţimea multiplilor unui număr natural

1. $D_2 = \{1, 2\}$, $D_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$, $D_{44} = \{1, 2, 4, 11, 22, 44\}$, $D_7 = \{1, 7\}$, $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $D_{39} = \{1, 3, 13, 39\}$, $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$. **2.** Adevărate **a)** şi **b)**. **3.** $A = \{1, 3, 5, 15\}$, $B = \{1, 2, 8, 17\}$, $C = \{1, 2, 10\}$, $D = \{30\}$, $E = \{35, 70\}$. **4.** $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 7\}$. **5.** $A = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$, $B = \{21, 62, 103, \ldots\}$, $C = \{2, 7, 12, \ldots\}$, $D = \{2, 6, 10, \ldots\}$. **6.** $x + 2 \in D_{50} \Rightarrow x + 2 \in \{1, 2, 5, 10, 25, 50\} \Rightarrow x \in \{0, 3, 8, 23, 48\}$ şi $3 \mid x \Rightarrow A = \{3\}$. Analog $B = \{0, 3\}$. Din $4 \leq 2x < 10 \Rightarrow 2 \leq x < 5 \Rightarrow x \in \{2, 3, 4\}$ şi din $(2x + 1) \mid 7 \Rightarrow 2x + 1 \in D_7 \Rightarrow 2x + 1 \in \{1, 7\} \Rightarrow 2x \in \in \{0, 6\} \Rightarrow x \in \{0, 3\} \Rightarrow C = \{3\}$. **7.** $A = \{0, 1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = = \{2\}$; **b)** card A = 4 = card B, card C = 1. **8.** $A = \{6, 8, 16, 38\}$, $B = \{0, 8\}$, $C = \{15\}$. **9.** $A = \{1, 6, 61\}$, $B = \{0, 8\}$, $C = \{0, 6, 48\}$, $D = \{2, 4, 8\}$. **10. a)** $A = \{3, 15, 45\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 3, 6\}$, $C = \{6\}$; **b)** card A = 3, card B = 6, card C = 1. **11.** $A = \{0, 3\}$, $B = \{0, 2\}$, $C = \{9\}$. **12.** $A = \{2, 12\}$, $B = \{0, 1, 3, 7, 15\}$, $C = \{3, 18\}$. **13.** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 7\}$. **14.** $A = \{1 \cdot 7, 2 \cdot 7, 3 \cdot 7, \ldots, n \cdot 7, \ldots\} = \{7, 14, 21, \ldots\}$, $B = \emptyset$, $C = \{3, 8, \ldots\}$, $D = \{3, 7, 11, 15, \ldots\}$. **15.** $A = \{308, 318, 328, 338, 348, 358, 368, 378, 388, 398\}$, $B = = \{156, 456, 756\}$.

22. Număr întreg. Mulţimea numerelor întregi. Reprezentarea pe axă

1. a)

; **b)** şi **c)** analog.
2. a) +12; **b)** –7; **c)** +10; **d)** –123; **e)** +2000; **f)** –2001. **3. a)** –24, –17, –4, –2, 0, +5, +12, +20; **b)** –11, –10, –7, –5, +1, +3, +5, +7; **c)** –2101, –2000, –1999, 1000, 2001, 2011. **4. a)** 10; **b)** –10; **c)** –987. **5.** 14, 15, 12, 0, 2, 6, 4, 4, 3. **6.** $A = \{-5, 5\}$, $B = \emptyset$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $D = \{-2, 2\}$. **7. a)** 4; **b)** 3; **c)** 7. **8. a)** $|-17|$, +12, $|+3|$, $-|-5|$, $-|+7|$, –11, –21; **b)** +15, $+|-5|$, $|+4|$, $-|-3|$, –6, $-|+7|$, –17; **c)** 24, $+|-14|$, $+|-12|$, –4, $-|-15|$, $-|+17|$, –57. **9.** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-5, 5\}$, $C = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{-1, 1\}$. **10.** $A = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, $B = \{11, 8, 5, 2\}$, $C = \{-7, -4, -1, 2\}$. **11. a)** $X_1 = \{-5, -1, 2\}$, $X_2 = \{-5, -1, 7\}$, $X_3 = \{-1, -5, 2, 7\}$; **b)** X este una din mulţimile: $\{-5, 4\}$, $\{-5, 7\}$, $\{-1, 4\}$, $\{-1, 7\}$, $\{-5, 4, 7\}$, $\{-1, 4, 7\}$. **12.** Adevărate **a)** şi **d)**, false

b) și **c)**. **13.** Numerele sunt: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2. **14.** $X_1 = \{+2, 0, |-3|\}$, $X_2 = \{-4, 2, 0\}$, $X_3 = \{-4, +2, -|-5|\}$. **15. a)** +7 sau –7; **b)** –14 sau +14; **c)** 0; **d)** nu există; **e)** –15 sau +15; **f)** –1 sau +1. **17.** Adevărate: **a), c), d), e),** restul sunt false. **18.** A = {–3, 0, 1, 3}. **19.** $M_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $M_2 = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2\}$, $M_3 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $M_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$, $M_5 = \{-3\}$, $M_6 = \{-7, 7\}$. **20.** M = {3, 4, 5, 6}. **21. a)** „⊂"; **b)** „∈"; **c)** „="; **d)** „⊂"; **e)** „⊂"; **f)** „∈"; **g)** „∋"; **h)** „∉"; **i)** „⊃".

23. Operații cu mulțimi (reuniune, intersecție, *diferență)

1. a) A = {1, 3, 5, 7}, B = {2, 4, 5, 7}, C = {4, 6, 7, 9}; **b)** {1, 2, 3, 4, 5, 7} = M_1, M_2 = {5, 7}, M_3 = {1, 3}, M_4 = {2, 4, 5, 6, 7, 9}, M_5 = {4, 7}, M_6 = {7}, M_7 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}. **2.** A ∪ B = {1, 2, 3, 5, 6, 7}, A ∩ B = {2}, A – B = {1, 5, 6}, B – A = {3, 7}. **3.** {1} ∪ {2, 3}, {2} ∪ {1, 3}, {3} ∪ {1, 2}, ∅ ∪ {1, 2, 3}. **4.** M = {1, 3} sau M = {1, 2, 3}. **5. a)** {1, 3, 7} ∩ {1, 3, 4}; **b)** {0, 1, 3} ∩ {1, 3, 8} ∩ {1, 3, 15}. **7. a)** B ∪ C = {0, 1, 2, 5}, A ∩ (B ∪ C) = {0}; **b)** A ∩ B = {0}, A ∩ C = ∅, (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) = = {0}; **c)** A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C). **8. a)** A = {–4, –3, –2, –1, 1, 2, 3, 4}, B = {2, 3}, C = {1, 2}; **b)** A ∪ B = A, A ∪ C = A, B ∪ C = {1, 2, 3}, A ∩ B = B, A ∩ C = C, B ∩ C = {2}, A – B = {–4, –3, –2, –1, 1, 4}, B – A = = ∅, A – C = {–4, –3, –2, –1, 3, 4}, C – A = ∅, B – C = {3}, C – B = {1}, (A ∪ B) ∩ C = C, (A ∩ B) ∪ C = B ∪ C = {1, 2, 3}, (A – B) ∪ (B – A) = = A – B = {–4, –3, –2, –1, 1, 4}, (A ∩ B) – A = ∅, A ∩ B ∩ C = {2}, (A – – B) ∩ C = {1}, (A ∪ B) – C = A – C = {–4, –3, –2, –1, 3, 4}, (A ∩ B) – A = = ∅, (A – C) ∩ (C – A) = ∅. **9.** Ultima cifră a lui x este 2 sau 7 și ca urmare x nu poate fi pătrat perfect ⇒ A ∩ B = ∅. **10.** x este număr impar și y este număr par, deci A ∩ B = ∅. **11.** x este multiplu de 7 plus 5, iar y este multiplu de 7 plus 3 ⇒ A ∩ B = ∅. **12.** x este multiplu de 4 plus 3, deci nu poate fi pătrat perfect ⇒ A ∩ B = ∅. **13.** $(2^{10})^2 < x < (2^{10} + 1)^2$ ⇒ x nu poate fi pătrat perfect, fiind situat între două numere naturale consecutive ⇒ ⇒ A ∩ B = ∅. **14.** A = {1, 3, 5, 6}, B = {2, 3, 4, 5, 7}. **16.** A = {0, 1, 2, 3, 5, 7}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 8}. **17.** 5 elevi. **18. a)** A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 1, 2, 3}; **b)** A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, A ∩ B = {1, 2, 3}, A – B = {4, 5}, B – A = = {0}. **19. a)** (A – B) ∪ C = {b} ∪ {c, d, e} = {b, c, d, e}; **b)** (A – C) ∩ B = = {a, b} ∩ {a, c, d} = {a}; **c)** (B – C) ∪ (A – ∅) = {a} ∪ A = {a, b, c}; **d)** A ∪ B ∪ C = {a, b, c, d, e}; **e)** A ∩ B ∩ C = {c}; **f)** (A ∩ B) – C = = {a, c} – C = {a}. **20.** A = $\{2^2, 2^3, 2^4\}$ = {4, 8, 16}, B = $\{3^2, 3^3, 3^4\}$ = {9, 27, 81}, A ∪ B = {4, 8, 9, 16, 27, 81}, A ∩ B = ∅, A – B = A, B – A = B,

(A – B) ∪ (B ∩ A) = A ∪ ∅ = A, (A ∪ B) ∩ (B – A) = B, A Δ B = A ∪ B. **21.** 58; **22.** A = {3, 5, 6}

24. Probleme recapitulative

1. a) A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {0, 1, 2, 3}, C = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}; **b)** A ∪ ∪ B = {0, 1, 2, 3, 5, 7, 9}, A ∩ B = {1, 3}, A ∩ C = {1, 3}, A – B = {5, 7, 9}, B – C = ∅, A ∪ B ∪ C = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9}, A ∩ B ∩ C = {1, 3}, B Δ C = (B – C) ∪ (C – B) = ∅ ∪ {–3, –2, –1} = {–3, –2, –1}. **2.** A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}. **3. a)** {–2, 0}; **b)** {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}; **c)** {–3, –1, 1, 2}; **d)** {0, 1, 2}; **e)** {0}; **f)** {–3, –2}. **4. a)** ∅, {c}, {d}, {c, d}; **b)** {e}, {f}, {e, f}. **5.** A = {a, b, c} și B = {b, c, d} sau A = {b, c, d} și B = {a, b, c}. **6.** card A = $2^{2003} - 2^{2002} - 1 = 2^{2002} - 1$ și card B = 2^{2002}. **7. a)** A = $\{0 + 0^2, 1 + 1^2, 2 + 2^2, 3 + 3^2, 4 + 4^2, 5 + 5^2 \ldots\}$ = {0, 2, 6, 12, 20, …}; B = {2 · 0 + 1, 2 · 1 + 1, 2 · 2 + 1, 2 · 3 + 1, 2 · 4 + 1 …}. = {1, 3, 5, 7, 9, …}; **b)** A ∩ B = ∅ deoarece A conține numere pare și B conține numere impare. **8.** a) card (A ∩ B) = 2; **b)** card (A ∪ B) = 6; **c)** A ∩ B = B. **9.** A = $\{3^0 - 1, 3^1 - 1, 3^2 - 1, 3^3 - 1\}$ = {0, 2, 8, 26} · B = {3 · 1 – 1, 3 · 2 – 1, 3 · 3 – 1} = {2, 5, 8} și A ∪ B = {0, 2, 5, 8, 26}, A ∩ B = {2, 8}, B\A = {5}, A ∪ ∅ = A și B ∩ ∅ = ∅. **10.** A = {1, 2, 4, 8}, B = {–2, 2}, C = {–2, –1}, D = {–2, 2}, A ∪ B = {–2, 1, 2, 4, 8}, A ∩ C = ∅, A ∪ B ∪ C = {1, 2, 4, 8, –2, –1}, A ∪ (B ∩ D) = {1, 2, 4, 8}, (B ∪ C) ∩ D = {–2, –1, 2} ∩ {–2, 2} = ={–2, 2}, A – B = {1, 4, 8}, (A ∪ C) – D = {1, 2, 4, 8, –2, –1} – {–2, 2} = ={1, 4, 8, –1}, A – (B ∪ C ∪ D) = {1, 2, 4, 8} – {–2, 2, –1} = {1, 4, 8}, A Δ B = =(A – B) ∪ (B – A) = {1, 4, 8} ∪ ∪ {–2} = {–2, 1, 4, 8}, C Δ D = (C – D) ∪ ∪(D – C) = {–1} ∪ {2} = {–1, 2}. **11.** $3 \mid \overline{1a6b} \Leftrightarrow 3 \mid (6 + 1 + a + b) \Rightarrow$ $3 \mid (7 + a + b) \Rightarrow 3 \mid (1 + a + b)$. Cum $4 \mid (a + b) \Rightarrow a + b = 8$. Dar $a \leq b \Rightarrow$ $(a, b) \in \{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$ și A = {1068, 1167, 1266, 1365, 1464}. Din $8 \mid \overline{1x6x} \Rightarrow 8 \mid \overline{x6x}$. Dar $4 \mid \overline{6x} \Rightarrow x \in \{4, 8\}$. Cum $8 \nmid 868 \Rightarrow$ $x = 4 \Rightarrow B = \{1464\}$, A ∪ B = A, A ∩ B = B, A – B = {1068, 1167, 1266, 1365}, B – A = ∅. **12. a)** A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {–6, –4, –3, 1, 2, 4}; **b)** –6; **c)** A ∩ B = {1, 2, 4}, A – B = {3, 5, 6, 7}, B – A = {–6, –4, –3}, (A ∪ B) – (A ∩ B) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, –6, –4, –3} – {1, 2, 4} = {3, 5, 6, 7, –6, –4, –3}, A Δ B = (A – B) ∪ (B – A) = {3, 5, 6, 7} ∪ {–6, –4, –3} = {–6, –4, –3, 3, 5, 6, 7}. **13.** A = {b, c, d}, B = {a, c, d, e, f} sau A = {a, c, d} și B = {c, d, e, f}. **14. a)** A = {2, 3, 4, 5, 6, 8}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 7}, C = $\{2^0 + 1, 3^0 + 1, 4^0 + 1, 5^0 + 1, 2^1 + 1, 3^1 + 1, 4^1 + 1, 5^1 + 1, 7^1 + 1\}$ = = {2, 3, 4, 5, 6, 8}; **b)** A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A ∩ B = {2, 3, 4, 5}, B – A = {1, 7},

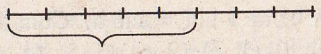
$A \cap B \cap C = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 7, 1, 6, 8\}$, $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B) \cap (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 7\} = \{1, 7\}$, $(A - B) \cup (C - A) = \{6, 8\} \cup \varnothing = \{6, 8\}$. **15.** $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{c, d, e, f\}$ sau $A = \{c, d, e, f\}$ şi $B = \{a, b, c, d\}$ sau $A = \{b, f, c, d\}$ şi $B = \{a, e, c, d\}$ sau $A = \{b, e, c, d\}$ şi $B = \{a, f, c, d\}$. **16.** 1. **17.** $a = 10$, $b = 5$, $c = 2$ şi **a)** 100; **b)** 1728; **c)** 1008; **d)** 117; **e)** 27. **18.** $a = 2001$, $b = 2001$, $c = 16$; **a)** $(a - 2000b)^{2001} = 1$; **b)** $a + b = 2001^2$, deci este pătrat perfect; **c)** $b + 2001c = 2001 \cdot 17$, care este multiplu de 17; **d)** $a - 1999b + 3^{4^{0^3}} = 2004$ şi reprezintă un an bisect. **19. a)** 6; **b)** 5; **c)** 1. **20. a)** 7; **b)** 2000; **c)** 0; **d)** 6; **e)** 12. **21.** $a = (2^6 - 1) : 3^2 - (1 + 4) = (64 - 1) : 9 - 5 = 63 : 9 - 5 = 7 - 5 = 2$ şi $b = 3^4 \cdot 11^4 - 33^4 + 1 = 1 \Rightarrow (a - b)^{2003} = (2 - 1)^{2003} = 1$.
22. $a = [1 + (3^3)^{21} : (3^4)^{15} + (2^3)^{10} : (2^4)^7 - 2^2 \cdot 7]^{63} = (1 + 3^{63} : 3^{60} + 2^{30} : 2^{28} - 28)^{63} = (1 + 3^3 + 2^2 - 28)^{63} = (1 + 27 + 4 - 28)^{63} = 4^{63} = 4^{3 \cdot 21} = (4^3)^{21} = 64^{21}$ şi $b = (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1)^{21} = (16 + 8 + 2 + 1)^{21} = 27^{21} \Rightarrow a > b$.

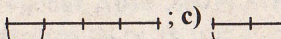
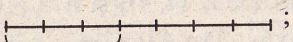
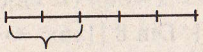
NUMERE RAȚIONALE

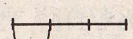
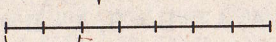
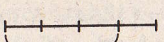
1. Fracție; reprezentarea fracțiilor cu ajutorul unor desene

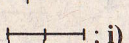
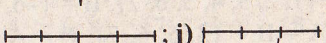
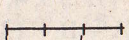
1. a) $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{5}{4}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{4}{5}$; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** $\frac{8}{10}$; **g)** $\frac{3}{6}$; **h)** $\frac{7}{2}$; **i)** $\frac{9}{3}$.

2. a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$; **b)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}$.

3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{8}{6}$. **4. a)** 

b)  ; **c)**  ; **d)**  ;

e)  ; **f)**  ; **g)**  ;

h)  ; **i)**  ; **j)**  . **5.** 17, 23, 7, 29, 57, 19.

7. a) 5; **b)** 15; **c)** 25. **8. a)** $\frac{1}{60}$; **b)** $\frac{1}{6}$; **c)** $\frac{3}{4}$; **d)** $\frac{1}{3}$; **e)** $\frac{5}{6}$; **f)** $\frac{3}{2}$. **9. a)** $\frac{1}{7}$; **b)** $\frac{3}{7}$; **c)** $\frac{5}{7}$; **d)** $\frac{28}{7}$. **10. a)** $\frac{1}{12}$; **b)** $\frac{4}{12}$; **c)** $\frac{6}{12}$. **11.** $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{2}, \frac{3}{7}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}\right\}$.

12. $\frac{1}{18}, \frac{2}{18}, \frac{3}{18}, \frac{6}{18}, \frac{9}{18}, \frac{18}{18}$. **13. a)** $\frac{9}{16}, \frac{18}{25}, \frac{29}{36}, \frac{42}{49}, \frac{57}{64}, \frac{74}{81}$; **b)** $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$; **c)** $\frac{12}{17}, \frac{42}{47}, \frac{72}{77}$. **14.** $\frac{13}{31}, \frac{17}{71}$. **15.** 1, 2, 3, 6, 9, 18.

16. $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}$. **17.** $\frac{30}{47}, \frac{35}{47}$. **18.** $\frac{3}{35}, \frac{3}{45}, \frac{3}{55}, \frac{3}{65}, \frac{3}{75}$.

19. $\frac{200}{351}, \frac{220}{351}, \frac{230}{351}, \frac{240}{351}, \frac{250}{351}, \frac{260}{351}, \frac{270}{351}, \frac{280}{351}, \frac{290}{351}, \frac{210}{354}, \frac{220}{354}, \frac{230}{354}, \frac{250}{354}, \frac{260}{354}, \frac{270}{354}, \frac{280}{354}, \frac{290}{354}, \frac{200}{354}, \frac{200}{357}, \frac{210}{357}, \frac{220}{357}, \frac{230}{357}, \frac{240}{357}, \frac{250}{357}, \frac{260}{357}, \frac{280}{357}, \frac{290}{357}$.

20. $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. Analog celelalte.

2. Fracții subunitare, echiunitare şi supraunitare

1. a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{17}, \frac{24}{31}$; **b)** $\frac{2}{2}, \frac{7}{7}, \frac{57}{57}$; **c)** $\frac{29}{7}, \frac{37}{4}, \frac{123}{9}$. **2. a)** $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{7}, \frac{15}{17}, \frac{12^0}{5}$; **b)** $\frac{3^3}{27}, \frac{2^4}{16}$; **c)** $\frac{17}{4}, \frac{23}{6}, \frac{37}{24}$. **3.** $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$. **4.** $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}$.

5. $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right\}$, $N = \left\{\frac{2}{2}\right\}$, $P = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right\}$. **6. a)** $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; **b)** $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; **c)** $x \in \{2, 3, 4\}$; **d)** $x > 5$. **7.** $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$.

8. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$; **b)** $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$; **c)** $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$. **9. a)** $\frac{7}{6}, \frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{1}$; **b)** $\frac{7}{7}$ **c)** $\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}$.

10. a) $\frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}$; **b)** $\frac{4}{4}$; **c)** $\frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{1}$. **11.** $\frac{7}{6}, \frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{1}$.

12. $\frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, ..., \frac{n}{7}$. **13. a)** $x \in \{5, 4, 3, 2\}$; **b)** $x \in \{0, 1\}$; **c)** $x \in \{0, 1, 2\}$; **d)** $x \in \{5, 6, ...\}$; **e)** $x \in \{2, 3, ...\}$. **14.** $\frac{13}{11}, \frac{12}{11}$. **15.** $\overline{1x} + \overline{x2} = 67 \Rightarrow 10 + x + 10x + 2 = 67 \Rightarrow 11x = 55 \Rightarrow x = 5$. **16. a)** $\frac{1}{49}, \frac{5}{36}, \frac{11}{25}$; **b)** $\frac{16}{16}, \frac{4}{4}, \frac{1}{1}$; **c)** $\frac{23}{9}, \frac{15}{4}, \frac{17}{16}$. **17. a)** $\frac{1}{25}, \frac{8}{37}, \frac{27}{49}$; **b)** $\frac{8}{8}, \frac{27}{27}, \frac{64}{64}$; **c)** $\frac{8}{3}, \frac{27}{5}, \frac{64}{17}$.

18. $A=\left\{\frac{30}{12},\frac{30}{42},\frac{30}{72},\frac{35}{12},\frac{35}{42},\frac{35}{72}\right\}$. **19. a)** $n>6$; **b)** $n=6$; **c)** $n<6$.

20. r este adevărată, iar q și p sunt false. **21.** $n=44$.

3. Reprezentări echivalente ale fracțiilor. Fracții egale

1. $4\cdot 3=12$ și $2\cdot 6=12$; $5\cdot 21=105$ și $7\cdot 15=105$; $1\cdot 30=30$ și $12\cdot 5=30$, $60\neq 30$; $3\cdot 34=102$ și $17\cdot 6=102$; $11\cdot 22=242$ și $4\cdot 33=132$, $132\neq 242$. **2. a)** $\frac{12}{28}=\frac{3}{7}=\frac{21}{49}$; **b)** $\frac{125}{15}=\frac{25}{3}=\frac{75}{9}$; **c)** $\frac{2^3}{8}=\frac{7}{7}=\frac{90}{90}$; **d)** $\frac{1}{3}=\frac{40}{120}=\frac{5}{15}$. **3. a)** 21; **b)** 20; **c)** 9; **d)** 4. **4.** $\frac{a}{b}=\frac{4}{6}$. **5.** $\frac{a}{b}=\frac{33}{44}$. **6.** $\frac{a}{b}=\frac{42}{30}$.

7. $x=2$. **8.** $\frac{3}{6},\frac{11}{22},\frac{33}{66}$. **9.** $\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{8}{12},\frac{10}{15},\frac{12}{18},\frac{14}{21}$. **10. a)** $\frac{5}{13}=\frac{10}{26}=\frac{15}{65}$; **b)** $\frac{44}{177}=\frac{132}{708}=\frac{220}{885}$; **c)** $\frac{3}{71}=\frac{24}{568}=\frac{15}{355}$. **11. a)** $\frac{30}{70}$; **b)** $\frac{22}{74}$; **c)** $\frac{82}{46}$; **d)** $\frac{38}{82}$; **e)** $\frac{24}{10}$. **12. a)** $x=12$; **b)** $x=105$; **c)** $x=4$; **d)** $x=9$. **13.** Nu, obligatoriu. Poate fi, de exemplu, $a=10$, $b=20$. **14.** $x=45$. **15.** $3a=2b\mid\cdot 17\Rightarrow 51a=34b$. **16.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$ și cum $c\cdot y=d\cdot x\Rightarrow a\cdot d\cdot c\cdot y=b\cdot c\cdot d\cdot x\mid:(c\cdot d)\Rightarrow a\cdot y=b\cdot x$. **17.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$. Cum $a\cdot y=b\cdot x\Rightarrow a\cdot d+a\cdot y=b\cdot c+b\cdot x\Rightarrow a\cdot(d+y)=b\cdot(c+x)\Rightarrow \frac{a}{c+x}=\frac{b}{d+y}$.

18. $x=1, y=5$; $x=6, y=0$; $x=2, y=2$; $x=3, y=1$. **19.** $x=2$.

20. $A=\{22,26,34,38\}$, $A=\left\{\frac{119}{114},\frac{119}{144},\frac{119}{174}\right\}$.

4. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Număr rațional

1. $\frac{3}{6};\frac{15}{21};\frac{3a}{3b};\frac{6x}{15y};\frac{3x+6}{3y+3};\frac{3a+3b}{3x+3y}$. **2.** $\frac{3n}{4n};\frac{7n}{2n};\frac{an}{bn};\frac{3an}{7bn};\frac{an+n}{bn+3n};\frac{an+bn}{xn+yn}$. **3.** 24, 16, 8, 4, 3, 2. **4.** 8, 16, 4, 2, 32. **5. a)** $y=2, x=6$; **b)** $y=3, x=5$; **c)** $y=3, x=9$. **6.** $x=3, y=7$. **7.** $\frac{2}{3};\frac{3}{9};\frac{a}{2b};\frac{2(a+b)}{5(x+y)};\frac{2^2}{3}$. **8.** $\frac{2}{3};\frac{5}{7};\frac{2}{11};\frac{1}{4};\frac{25}{33};\frac{2}{7};\frac{2}{5};\frac{2}{3};\frac{2}{3}$.

9. a) $x=2, y=4$; **b)** $y=5, x=9$; **c)** $y=7, x=33$. **10.** $x=16, y=3$.

11. a) $\frac{375}{871}$; **b)** $\frac{a+b+c}{x+y+z}$; **c)** $\frac{\overline{ab}}{17}$. **12.** Indicație: $\overline{1a7b}\vdots 36$ și $\overline{c51d}\vdots 36$.

13. $\frac{x^2+x}{2x+4}=\frac{x(x+1)}{2(x+2)}$, $x, x+1$ = nr. naturale consecutive $\Rightarrow x(x+1)\vdots 2$ și $2(x+2)\vdots 2\Rightarrow \frac{x(x+1)}{2(x+2)}$ se simplifică prin 2, oricare ar fi $x\in\mathbf{N}$.

14.

a	b	a · b	a + b	ab(a + b)
p	p	p	p	p
p	i	p	i	p
i	p	p	i	p
i	i	i	p	p

p = nr. par,
i = nr. impar

Din acest tabel rezultă că $ab(a+b)\vdots 2$. Dar $x, x-1$ sunt numere naturale consecutive $\Rightarrow x(x-1)\vdots 2\Rightarrow x(x-1)+6\vdots 2\Rightarrow (x-x+6)\vdots 2$. Deci fracția se simplifică prin 2, oricare ar fi $a, b, x\in\mathbf{N}^*$. **15.** Notăm $(n; n+1)=d\Rightarrow$ $\Rightarrow d\mid n+1$ și $d\mid n\Rightarrow d\mid(n+1-n)\Rightarrow d\mid 1$. Cum $d\in\mathbf{N}^*\Rightarrow d=1\Rightarrow(n; n+1)=1\Rightarrow \frac{n}{n+1}$ este ireductibilă. **16, 17, 18** asemănătoare cu **15**. **19.** Notăm cu $d=(n+4; n+6)\Rightarrow d\mid n+6$ și $d\mid n+4\Rightarrow d\mid(n+6-n-4)\Rightarrow$ $\Rightarrow \left.\begin{matrix}d\mid 2\\ d\neq 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow d=2\Rightarrow n+4\vdots 2\Rightarrow n=2k, k\in\mathbf{N}$. **20, 21, 22** asemănător cu **19**.

5. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

1. a) $\frac{5}{15}$ și $\frac{6}{15}$; **b)** $\frac{45}{105}$ și $\frac{28}{105}$; **c)** $\frac{28}{35}$ și $\frac{29}{35}$; **d)** $\frac{81}{108}$ și $\frac{48}{108}$; **e)** $\frac{11}{66},\frac{12}{66},\frac{33}{66}$; **f)** $\frac{2}{72},\frac{7}{72},\frac{15}{72}$; **g)** $\frac{33}{36},\frac{16}{36},\frac{17}{36}$; **h)** $\frac{10}{285},\frac{9}{285},\frac{15}{285}$. **2. a)** 35, $35\cdot 2=70$, $35\cdot 3=105$; **b)** 44, 88, 132; **c)** 51, 102, 153; **d)** 135, 270, 405; **e)** 132, 264, 396. **3.** 105, 42, 35, 21, 14, 10, 6, 30. **4. a)** $\frac{36^{(4}}{432}=\frac{9^{(9}}{108}=\frac{1}{12}$ și $\frac{5}{12}$;

b) $\frac{75^{(25}}{425}=\frac{3}{17}$ și $\frac{15^{(5}}{255}=\frac{3^{(3}}{51}=\frac{1}{17}$; **c)** $\frac{64^{(4}}{288}=\frac{16^{(4}}{72}=\frac{4^{(2}}{18}=\frac{2}{9}$ și $\frac{105^{(5}}{135}=$

$= \frac{21^{(3}}{27} = \frac{7}{9}$; **d)** $\frac{720^{(10}}{7920} = \frac{72^{(2}}{792} = \frac{36^{(2}}{396} = \frac{18^{(2}}{198} = \frac{9^{(3}}{99} = \frac{3}{33}$ și $\frac{240^{(10}}{990} = \frac{24^{(3}}{99} = \frac{8}{33}$.

5. a) $\frac{36}{3528}, \frac{147}{3528}, \frac{88}{3528}$; **b)** $\frac{3}{180}, \frac{26}{180}, \frac{42}{180}$; **c)** $\frac{12}{300}, \frac{16}{300}, \frac{11}{300}$; **d)** $\frac{8xy}{12y^2}, \frac{2}{12y^2}, \frac{4}{12y^2}$; **e)** $\frac{3xz^2}{x^2yz^2}, \frac{4x^2}{x^2yz^2}, \frac{y}{x^2yz^2}$. **6. a)** 180; **b)** $2^3 \cdot 5^2 = 200$; **c)** $2^2 \cdot 7^2 = 196$. **7. a)** $\frac{3}{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7}, \frac{2 \cdot 4 + 1}{1 \cdot 2} = \frac{9}{2} \Rightarrow {}^{2)}\ \frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ și ${}^{7)}\ \frac{9}{2} = \frac{63}{14}$;

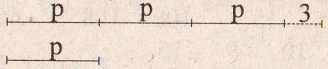
b) Analog $\frac{54}{42}$ și $\frac{49}{42}$; **c)** $\frac{75}{24}$ și $\frac{114}{24}$. **8. a)** $\frac{a}{3a^2}, \frac{2}{3a^2}$; **b)** $\frac{9ab}{18a^2b^2}, \frac{3}{18a^2b^2}$; **c)** $\frac{21b}{33ab}, \frac{a}{33ab}$; **d)** $\frac{3b}{a^2b^2}, \frac{5a}{a^2b^2}$; **e)** $\frac{5b^2}{105a^2b^2}, \frac{12a}{105a^2b^2}$; **f)** $\frac{15bc}{30abc}, \frac{10ac}{30abc}, \frac{6ab}{30abc}$; **g)** $\frac{2a}{12a^2b^2}; \frac{b^2}{12a^2b^2}, \frac{3a^2}{12a^2b^2}$. **9.** Divizorii lui 225 pot fi numitori, adică: |–25|, 15, |–3|, |–75|. **10.** Nu pot fi numitori comuni numerele: |–140|, 324, 235, 144.

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1

1. a) 1; **b)** 9500. **2.** a > b; $\left.\begin{array}{l} a+b=191 \\ a=b\cdot 3+3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3b+3+b=191 \Leftrightarrow 4b=188 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ b = 47 și a = 47 · 3 + 3 = 144.

Sau: a:  $\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} 191 \Rightarrow 4p + 3 = 191$

3. $\overline{xy} = \overline{yx} + 54 \Leftrightarrow 10x + y = 10y + x + 54 \Leftrightarrow 9x = 9y + 54 \Leftrightarrow 9(x - y) = 54$

$\Leftrightarrow x - y = 6$; x, y = cifre nenule $\Rightarrow \begin{array}{l} x=9 \\ y=3 \end{array}$ sau $\begin{array}{l} x=8 \\ y=2 \end{array}$ sau $\begin{array}{l} x=7 \\ y=1 \end{array} \Rightarrow$ 93, 82, 71.

4. 400.

TESTUL 2

1. a) $47 : 47 = 3^2 - 2^x \Leftrightarrow 1 = 9 - 2^x \Leftrightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$; **b)** $2^{2(1+2+\ldots+x)} = 2^{3 \cdot 14} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{1+2+\ldots+x}_{[x\cdot(x+1)]:2} = 3 \cdot 7 \Leftrightarrow [x \cdot (x+1)] : 2 = 21 \Leftrightarrow x(x+1) = 42 \Rightarrow x = 6.$

2. 83, 88, 176. **3.** $a = 499 \cdot c + c$, $c < 499 \Rightarrow c = 490$; $a = 499 \cdot 490 + 490$; $a = 490 \cdot (499 + 1)$; $a = 490 \cdot 500 \Leftrightarrow a = 245\,000$.

4. A = {0, 1, 2, 3}; B = {1, 3, 5, 7}.

TESTUL 3

1. A = {1; 3}; B = {0, 1, 2, 3} sau A = {0, 1, 3}; B = {1, 2, 3} sau A = {1, 2, 3}; B = {0, 1, 3}. **2.** x = 300. **3.** 56.

4. $\left.\begin{array}{l} \frac{a+b+c}{3} = 20 \Leftrightarrow a+b+c = 60 \\ \frac{a+b}{2} = 19 \Leftrightarrow a+b = 38 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 60 - 38 = 22$

$\left.\begin{array}{l} a+b+c = 60 \\ \frac{b+c}{2} = 21 \Leftrightarrow b+c = 42 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 60 - 42 = 18$

b = 38 – 18 = 42 – 22 = 20.

TESTUL 4

1. a) $ab + ac = a(b + c) = 7 \cdot 9 = 63$; $ab - ac = a(b - c) = 7 \cdot 5 = 35$

$\left.\begin{array}{l} ab+ac=63 \\ ab-ac=35 \end{array}\right\} \Rightarrow 2ab = 98 \Rightarrow a \cdot b = 49$; **b)** 3^n. **2.** Primul număr: a; al doilea număr va fi 3a; $4a + 2 \cdot 3a = 560 \Leftrightarrow a = 56 \Rightarrow$ I: 56; II: 168. **3.** Dacă x este primul număr, atunci $7(x + 21) = 2000 \Rightarrow x + 21 \notin \mathbf{N}$. **4.** Cu teorema împărțirii cu rest avem: $n = 28 \cdot c + c^3$, $c^3 < 28 \Rightarrow c \in \{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow n \in \{0, 29, 64, 111\}$.

TESTUL 5

1. a) x = 1; **b)** x = 3. **2.** Cu teorema împărțirii cu rest avem: $n = 7 \cdot 2000 + r$, $r < 7 \Rightarrow r \in \{0, 1, \ldots, 6\}$; $S = (7 \cdot 2000 + 0) + (7 \cdot 2000 + 1) + \ldots + (7 \cdot 2000 + 6) = 7 \cdot 2000 \cdot 7 + (6 \cdot 7) : 2 = 7^2 \cdot 2000 + 3 \cdot 7 = 7(7 \cdot 2000 + 3) = 7 \cdot 14003 = 98021$. **3.** $a = 2000(1 + 2001) + 2002 \cdot 2 = 2000 \cdot 2002 + 2002 \cdot 2 = 2002 \cdot (2000 + 2) = 2002^2 = p \cdot p$.

4. *Rezolvarea 1.* Dacă x este numărul problemelor rezolvate corect, atunci 24 – x este numărul problemelor rezolvate incorect. Din ecuația $x \cdot 5 = (24 - x) \cdot 3$ rezultă x = 9. *Rezolvarea 2.* Presupunem că elevul a rezolvat incorect

toate cele 24 de probleme. Atunci ar fi fost penalizat cu $24 \cdot 3 = 72$ puncte. Dacă înlocuim o problemă rezolvată incorect cu una rezolvată corect, atunci el ar primi $3 + 5 = 8$ puncte. Vom face $72 : 8 = 9$ înlocuiri. Rezultă 9 probleme rezolvate corect.

TESTUL 6

1. a) 11; **b)** 0. **2.** $2 \mid \overline{12a} \Rightarrow a \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow S = 620$.

3. *Rezolvarea 1.* Fie x bănci. Atunci numărul elevilor este $\left.\begin{matrix} 2x+1 \\ 3(x-4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot (x-4) = 2x + 1 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow 27$ de elevi.

Rezolvarea 2. Pentru a ocupa toate băncile cu câte 3 elevi mai aducem $4 \cdot 3 = 12$ elevi. Lăsând câte 2 elevi în bancă, vom ridica în picioare $1 + 12 = 13$ elevi $\Rightarrow 13$ bănci și $13 \cdot 2 + 1 = 27$ de elevi.

4. $\overline{abc} - \overline{cba} = 99a - 99c = 99(a-c) = 9 \cdot 11 \cdot (a-c) \Rightarrow a - c = 11$; a, c sunt cifre $\Rightarrow a - c < 11$ (F).

TESTUL 7

1. $3a + 12b + 8c = 3a + 6b + 6b + 8c = 3(a + 2b) + 2(3b + 4c) = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 20 = 24 + 40 = 64 = 8^2$. **2.** $a = 2^n \cdot (8 + 4 + 2 + 1) = 2^n \cdot 15 = 2^n \cdot 5 \cdot 3 \Rightarrow a \vdots 10$ și $a \vdots 3$.

3. $\left.\begin{matrix} a = 3^{22} = 9^{11} \\ b = 4^{15} = 2^{30} = 8^{10} \\ c = 2^{33} = 8^{11} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8^{10} < 8^{11} < 9^{11} \Rightarrow b < c < a.$

4. $a > b$, $a, b \in \mathbf{N}$

$$\left.\begin{matrix} a+b=100 \\ a=b\cdot 4+r,\ r<b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4b + r + b = 100 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5b+r=100 \\ 5b=M5 \\ 100=M5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = M5 < b \Rightarrow$$

$\Rightarrow r \in \{0, 5, 10, \ldots\}$; $r = 0 \Rightarrow 5b = 100 \Rightarrow b = 20$ și $a = 80$; $r = 5 \Rightarrow 5b = 95 \Rightarrow b = 19$ și $a = 81$; $r = 10 \Rightarrow 5b = 90 \Rightarrow b = 18$ și $a = 82$; $r = 15 \Rightarrow 5b = 85 \Rightarrow b = 17$ și $a = 83$; $r = 20 \Rightarrow 5b = 80 \Rightarrow b = 16$ (F), $(r < b)$.

TESTUL 8

1. a) $\dfrac{100x+10x+9+80+x+7}{100x+90+x+10x+6} = \dfrac{111x+96}{111x+96} = 1 \in \mathbf{N}$; **b)** 1233. **2.** $A = \{2, 3,$

$4, 5\}$; $B = \{3, 4, 6\}$; $S = (2 + 3 + 4 + 5) + (3 + 4 + 6) = 14 + 13 = 27 = 3^3$ (A).

3. Băieți: $n \Rightarrow$ fete $2 \cdot n$. În clasă vor fi $n + 2n = 3 \cdot n$ elevi; $3 \cdot n = 27 \Rightarrow n = 9 \in \mathbf{N}$ (DA); $3 \cdot n = 25 \Rightarrow n \notin \mathbf{N}$ (NU).

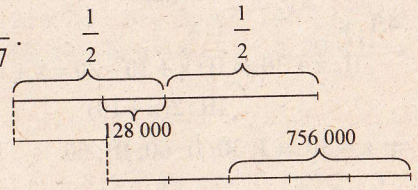
4. $\dfrac{3^n \cdot 5^n \cdot 3 + 3^n \cdot 5^n \cdot 5 + 3^n \cdot 5^n \cdot 3 \cdot 5}{23} = \dfrac{15^n \cdot (3+5+15)}{23} = \dfrac{15^n \cdot 23}{23} = 15^n \in \mathbf{N}$.

TESTUL 9

1. a) Regula: $5n + 2$, $n \in \mathbf{N}$; **b)** Regula: $3^n - 2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

2. $\left.\begin{matrix} y + 5 \cdot (2a + 7b) = 239 \\ 2a + 7b = 28 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y + 5 \cdot 28 = 239 \Rightarrow y = 99$. **3.** Cea mai mare fracție: $\dfrac{19}{265}$. Cea mai mică fracție: $\dfrac{6}{107}$.

4. $(756\,000 : 3 \cdot 5 - 128\,000) \cdot 2 = 2\,264\,000$ (lei).



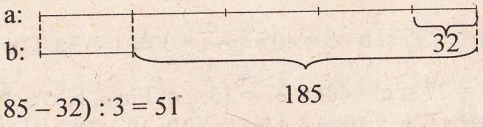
TESTUL 10

1. $a = 13$, $b = 529$, $c = 64$; $10 \cdot 13 + 529 - 8 \cdot 64 = 147$.

2. *Rezolvarea 1.* Cu teorema împărțirii cu rest avem:

$$\left.\begin{matrix} a = b \cdot 4 + 32,\ 32 < b \\ a - b = 185 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3b + 32 = 185 \Rightarrow b = 51 > 32, \text{ iar } a = 4 \cdot 51 + 32 = 236.$$

Rezolvarea 2



$b = (185 - 32) : 3 = 51$

$a = 4 \cdot 51 + 32$

3. Cifrele fiind mai mici decât baza de numerație deducem: $a < 6$, $b < 6$, $c < 6$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Egalitatea se scrie: $a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + a + b \cdot 8 + c - b \Leftrightarrow 48a = 36b + 6c \mid :6 \Leftrightarrow \underbrace{8a}_{M2} = \underbrace{6b}_{M2} + c \Rightarrow c = 2 < 6 \Rightarrow 8a = 6b + 2 \mid :2$

$\Rightarrow 4a = 3b + 1$; $a = 1$, atunci $b = 1$; $a = 2$, atunci $b = 7 : 3$ (F); $a = 3$, atunci $b = 11 : 3$ (F); $a = 4$, atunci $b = 5$; $a = 5$, atunci $b = 19 : 3$ (F).

Deci $(a, b, c) \in \{(1; 1; 2), (4; 5; 2)\}$.

4. *Rezolvarea 1.* Dacă tot grupul ar fi format numai din fete, atunci s-ar fi cules $30 \cdot 8 = 240$ (kg). S-a creat o diferență de 240 kg – 186 kg = 54 kg. Înlocuind un băiat cu o fată, diferența de 5 kg se micșorează cu 8 kg – 5 kg = 3 kg. Vom face 54 kg : 3 kg = 18 înlocuiri. Atunci vor fi 18 băieți și 30–18 =

=12 fete.

Rezolvarea 2. Notăm cu x numărul băieților. Numărul fetelor va fi 30 – x. Ecuația $8 \cdot x + (30 - x) \cdot 5 = 186 \Rightarrow x = 12$.

TESTUL 11

1. $3^{2n+1} + 9^{n+1} = 972 \Leftrightarrow 9^n \cdot 3 + 9^n \cdot 9 = 972 \Leftrightarrow 9^n \cdot 12 = 972 \Leftrightarrow 9^n = 81 \Rightarrow n = 2$.

2. Fie a, b ∈ **N** pentru care

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 168 \\ \text{Dar } (a+6) \cdot \dfrac{b}{4} = 168 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a = a + 6 \Rightarrow a = 2 \text{ şi } b = 84.$$

3. 251, 253, 255, 257, 259.

4.
$$\left.\begin{array}{l} \text{I} : x \\ \text{II} : x + 30 \Rightarrow \text{II} : x + 30 - 20 = x + 10 \\ \text{III} : 2(x + 10) \end{array}\right\} \Rightarrow x + x + 10 + 2(x + 10) = 150 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 30 \Rightarrow$ I: 30; II: 60; III: 60.

TESTUL 12

1.
$$\left.\begin{array}{l} a = 2^{485} = \left(2^5\right)^{97} = 32^{97} \\ b = 6^{194} = \left(6^2\right)^{97} = 36^{97} \end{array}\right\} \Rightarrow a < b.$$

2. $\overline{ab} = 5a + 3b \Leftrightarrow 10a + b = 5a + 3b$

$\Leftrightarrow 5a = 2b$; a, b = cifre $\Rightarrow a = 2$; $b = 5 \Rightarrow \overline{ab} = 25$. **3.** Fie a, b, c ∈ **N** pentru care: $a \cdot b = 135$ şi $b \cdot c = 405 \Rightarrow \dfrac{c}{a} = 3 \Rightarrow c = 3a$. Dar $c = a + 10 \Rightarrow a = 5$, $b = 135 : 5 = 27$ şi $c = 405 : 27 = 15$. **4.** Fie a, b, c ∈ **N** astfel încât $a + b + c = 222$. Dar $a = b + 10$ şi $c = b \cdot 3 + 12$, $12 < b \Rightarrow b + 10 + b + 3b + 12 = 222$ $\Rightarrow b = 40$, $a = 50$, $c = 132$.

TESTUL 13

1. 3. **2. a)** A; **b)** F; **c)** A; **d)** F; **e)** A. **3.** $3^{1+2+3+\ldots+n} = 8 \cdot 9^{17} + 9^{17} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{n(n+1)}{2}} = 9^{18} \Leftrightarrow 3^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{36} \Rightarrow n(n+1) = 72 \Rightarrow n = 8$. **4.** Numărul cuprins între 20 şi 26 care are cel mai mare număr de divizori este 24. Suma divizorilor lui este 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 60. Numerele sunt 15 şi 45.

TESTUL 14

1. A = {0, 2, 4, 6, 8} şi B = {7, 9, 11, 13}. **2.** Cu teorema împărțirii cu rest avem: $a = 27 \cdot 56 + r$, $r < 27 \Rightarrow a = 27 \cdot 56 + 26 = 1538$ este cel mai mare; $a = 27 \cdot 56 + 0 = 1512$ este cel mai mic. S = 3050. **3.** Condiția bazei de numerație: $x \geq 6$. $2x + 4 + 3x + 5 = 39 \Leftrightarrow x = 6$.

TESTUL 15

1. $\overline{3x} + \overline{4y} = 30 + x + 40 + y = \underbrace{70 + x + y}_{k^2} \leq 70 + 9 + 9 \Rightarrow 70 < k^2 \leq 88 \Rightarrow k^2 =$

$= 81 \Rightarrow x + y = 11 \Rightarrow (x, y) = \{(2; 9), (3; 8), \ldots, (8; 3), (9; 2)\}$. **2.** Dacă $a \leq 3$, atunci $x > y$. Dacă $a > 3$, atunci $x < y$. **3. i)** $ac + bc = c(a + b) = 28 \cdot 246 =$ $= 6888$; **ii)** $7a + 5b + 2b - 2c = 7a + 7b - 2c = 7(a + b) - 2c = 7 \cdot 246 - 2 \cdot 28 =$ $= 1666$. **4.** $a + b + c = 574$; $a = b \cdot 0 + 50$, $50 < b$; $c = b \cdot 3 + 20$, $20 < b \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 50$, $b = 126$, $c = 398$.

TESTUL 16

1. $S = (3 \cdot 0 + 4) + (3 \cdot 1 + 4) + (3 \cdot 2 + 4) + \ldots + (3 \cdot 14 + 4) = 3 \cdot (1 + 2 + 3 +$

$+ \ldots + 14) + 15 \cdot 4 = 3 \cdot \dfrac{14 \cdot 15}{2} + 15 \cdot 4 = 3 \cdot 7 \cdot 15 + 15 \cdot 4 = 15 \cdot (21 + 4) =$

$= 15 \cdot 25 = 375$. **2.** $a + b = 591$; $a = b \cdot 23 + 15$, $15 < b \Rightarrow a = 567$, $b = 24$.

3. $n = 111a - 100a - 11b + 3b - 3a$; $n = 8a - 8b = 8 \cdot (a - b) \Rightarrow a - b = 2$ sau $a - b = 8$; $(a, b) \in \{(9; 7), (8; 6), (7; 5), (6; 4), (5; 3), (4; 2), (3; 1), (9; 1)\}$.

4. Avem cazurile:

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \\ z-4=15 \end{cases}; \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=15; \\ z-4=1 \end{cases} \begin{cases} x-1=15 \\ y+1=1 \\ z-4=1 \end{cases}; \begin{cases} x-1=3 \\ y+1=5; \\ z-4=1 \end{cases} \begin{cases} x-1=3 \\ y+1=1 \\ z-4=5 \end{cases}; \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=3; \\ z-4=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=5 \\ y+1=3; \\ z-4=1 \end{cases} \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=5; \\ z-4=3 \end{cases} \begin{cases} x-1=5 \\ y+1=1; \\ z-4=3 \end{cases} (x, y, z) \in \{(2, 0, 19), (2, 14, 5), (16, 0, 5),$$

$(4, 4, 5), (4, 0, 9), (2, 2, 9), (6, 2, 5), (2, 4, 7), (6, 0, 7)\}$.

TESTUL 17

1. $x = 3$, $y = 5000$; $E = x^2 + [y(x - z)] : 1000 = 9 + (5000 \cdot 2) : 1000 = 9 + 10 = 19$.

2. 310, 320, …, 390, 315, 325, 335, …, 395; $S = 310 \cdot 9 + (10 + 20 + \ldots +$ $+ 80) + 315 \cdot 9 + (10 + 20 + \ldots + 80) = 9 \cdot (310 + 315) + 2 \cdot 10(1 + 2 + \ldots +$

$+ 8) = 9 \cdot 625 + 20 \cdot 36 = 6345$. **3.** $\frac{8x-1}{5x+23} < 1 \Rightarrow 8x - 1 < 5x + 23$; $x \in \mathbf{N}^*$ $\Rightarrow x \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. **4.** $\frac{x}{17} = 1080 - x \Leftrightarrow x = (1080 - x) \cdot 17 \Leftrightarrow x = 1020$.

TESTUL 18

1. a) $\left(\frac{31}{50} + \frac{19}{50}\right) + \left(\frac{12}{50} + \frac{38}{50}\right) = 1 + 1 = 2$; **b)** $\left(\frac{5}{11} + \frac{6}{11}\right) + \left(\frac{9}{22} + \frac{2}{22}\right) = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

2. $7^{160} = (7^4)^{40} = 2401^{40}$; $13^{120} = (13^3)^{40} = 2197^{40} \Rightarrow \frac{7^{160}}{13^{120}} > 1$.

3. $\frac{5x+12}{x+3} = \frac{5x+15-3}{x+3} = \frac{5(x+3)}{x+3} - \frac{3}{x+3} = 5 - \frac{3}{x+3} \in \mathbf{N} \Rightarrow x = 0$.

4. $\frac{a}{b} = \frac{13}{5}$ şi $a + b = 162$. Atunci avem: $5a = 13b$; $a + b = 162 \Rightarrow 5a + 5b =$ $= 5 \cdot 162 \Rightarrow 13b + 5b = 810 \Rightarrow b = 45$ şi $a = 117 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{117}{45}$.

TESTUL 19

1. a) $\frac{5}{7}$; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{3}{4}$; **d)** $\frac{2^4 \cdot 5^4}{2^3} = 2 \cdot 5^4 = 1250$. **2.** $1\frac{4}{15}$. **3.** $A = \{0, 2, 3, 8, 18\}$, $B = \{2, 8, 52\}$. **4.** Fie $a, b, c \in \mathbf{N}$ astfel încât: $b + c = 382$; $a \cdot c = 6840$; $a \cdot b =$ $= 10350 \Rightarrow a \cdot (b + c) = 17190 \Rightarrow a \cdot 382 = 17190 \Rightarrow a = 45$, $b = 10350 : 45 =$ $= 230$ şi $c = 6840 : 45 = 152$.

TESTUL 20

1. a) $n + 2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 4, 6, 10, 22\}$; **b)** $2n + 1 \in$ $\in \{1, 3, 9, 27\} \Rightarrow n \in \{0, 1, 4, 13\}$. **2. a)** 11; **b)** 10^6; **c)** 0. **3.** 1 875 000 lei. **4.** Fie $a, b, c \in \mathbf{N}$ astfel încât: $a \cdot b = 6$; $b \cdot c = 15$; $a \cdot c = 10 \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 =$ $= 6 \cdot 15 \cdot 10 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 30$; $a \cdot b = 6$; $a \cdot b \cdot c = 30 \Rightarrow c = 5$; $b \cdot c = 15$; $a \cdot b \cdot c = 30 \Rightarrow a = 2$; $a \cdot c = 10$; $a \cdot b \cdot c = 30 \Rightarrow b = 3$.

TESTE PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADELOR ŞCOLARE

TESTUL O.1

1. $u(9^{2k}) = 1$; $u(7^{4k}) = 1 \Rightarrow u(A) = 0$. **2.** Se ştie că $u(n^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$; $u(5n) \in \{0; 5\} \Rightarrow u(B) \in \{7; 2\} \Rightarrow B \neq$ p.p. **3.** $2(4a + 7b) + 3(5a +$ $+ 3b) = 23 \cdot (a + b) = M23$. **4.** $S_{60} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 60 = (60 \cdot 61) : 2 = 1830 >$ $> 1829 \Rightarrow$ două numere naturale din sumă sunt egale. Atunci diferenţa lor este zero ($0 = 0 \cdot n = Mn$, $n \in \mathbf{N}$).

TESTUL O.2

1. a) $2^{2002} + \left(2^2\right)^{1001} = 2^n \Leftrightarrow 2^{2002} + 2^{2002} = 2^n \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2002} = 2^n \Leftrightarrow 2^{2003} = 2^n \Rightarrow$ $n = 2003$. **b)** $\left(2^{5^2}\right)^m = 2^{25 \cdot m}$ şi $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \ldots 2^{50} = 2^{25 \cdot 51}$ şi divizorii improprii se obţin pentru $m = 0$ şi $m = 51$. **2.** Fie a, b, c numărul elevilor din cele trei grupe $\Rightarrow a + b + c = 24$ şi $13a + 5b + 4c = 15 \Rightarrow 145 = (9a + b) + 4(a + b + c)$ $= (9a + b) + 4 \cdot 24 = (9a + b) + 96 \Rightarrow 9a + b = 49$. Din $0 \le b \le 24$ şi $9a + b = 49$ $\Rightarrow 2 \le a \le 5$. Pentru $a \in \{2, 3\} \Rightarrow a + b + c > 24$ (nu convine), pentru $a = 4 \Rightarrow$ $13a + 5b + 4c > 145$ (nu convine) $\Rightarrow a = 5$, $b = 4$ şi $c = 15$. **3.** Fie n numărul căutat şi n' răsturantul său. Cum $n \le 99 \Rightarrow n + n' \le 198 < 1110$. Dacă $n >$ $> 10\,000 \Rightarrow n + n' > 1110$. Fie $n = \overline{xyzt} \Rightarrow n' = \overline{tzyx}$ şi $1001(x + t) +$ $+ 110(y + z) = 1110 \Rightarrow 10 \mid (x + t)$ absurd. Rămâne cazul $n = \overline{xyz} \Rightarrow 101(x +$ $+ z) + 20y = 1110 \Rightarrow 10 \mid (x + z)$ şi $1 \le x + z < 11 \Rightarrow x + z = 10$ şi $y = 5 \Rightarrow$ $n \in \{159, 258, 357, 456, 555, 654, 753, 852, 951\}$; **b)** Fie $C \neq \emptyset$ şi $c \in C \Rightarrow$ $c \notin B \cup C$ (din $c \notin A - C$ şi $A - C = B \cup C$) şi $c \in B \cup C$, absurd. Pentru $C = \emptyset \Rightarrow$ $A = B$.

TESTUL O.3

1. $a = b \cdot 19 + 99$, $99 < b$; $a - b < 1917 \Rightarrow 19b + 99 - b < 1917 \Leftrightarrow 18b < 1818$ $\Leftrightarrow b < 101$. Dar $b > 99 \Rightarrow b = 100 \in \mathbf{N}$ şi $a = 1999$. **2.** $b^2 < b^2 + b < (b + 1)^2$ $\Rightarrow b^2 + b \neq$ p.p. $\Rightarrow b^2 + b = 110 \Rightarrow b = 10$. Atunci $3a + 2b + 1 = 3a + 2 \cdot 10 +$ $+ 1 = 3a + 21$. Rezultă că $B = \{110, 3a + 21, c^2\}$. Numerele $3a + 21$ şi c^2 au parităţi diferite. Atunci $3a + 21 = 36 \Leftrightarrow 3a = 15 \Leftrightarrow a = 5$ şi $c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$. **3.** $n^2 + n = n(n + 1) =$ număr par; $2n + 1 \neq 2n - 1$ şi $2n + 1$, $2n - 1 =$ numere impare $\Rightarrow n(n + 1) = 12 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow A = \{12; 7\}$ şi $B = \{12; 5\}$. **4.** Fie $x \in \mathbf{N}$ astfel încât $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 5^{n+1} \Leftrightarrow 5x + 10 = 5^{n+1}$

$\Leftrightarrow 5(x+2)=5^n\cdot 5 \Leftrightarrow x+2=5^n \Leftrightarrow x=5^n-2$. Numerele sunt: 5^n-2, 5^n-1, 5^n, 5^n+1, 5^n+2, $n\in \mathbf{N}^*$.

TESTUL O.4

1. Egalitatea se scrie: $11a+11b+11c=100a+10b+c \Leftrightarrow b+10c=89a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\overline{cb}=89a\\ \overline{cb}\le 99\end{matrix}\right\} \Rightarrow 89a\le 99 \Leftrightarrow a=1$. Atunci $\overline{cb}=89 \Rightarrow c=8, b=9$.

2. $3x+5y=3(x+y)+2y=1999 \Leftrightarrow x+y\le 1999:3 \Rightarrow x+y<667$; $3x+5y=5(x+y)-2x=1999 \Leftrightarrow x+y\ge 1999:5 \Rightarrow x+y>399$. **3.** Ecuația se scrie: $6x-y-xy=0 \Leftrightarrow x(6-y)-y=0 \Leftrightarrow x(6-y)+6-y=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6-y)(x+1)=6$. Avem cazurile: $\left.\begin{matrix}6-y=1\\ x+1=6\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=5, y=5$; $\left.\begin{matrix}6-y=2\\ x+1=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2, y=4$; $\left.\begin{matrix}6-y=3\\ x+1=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=1, y=3$; $\left.\begin{matrix}6-y=6\\ x+1=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=0, y=0$.

4. a) $a=2^m(2^3-2^2+2-1)=2^m\cdot 5=M5$; $b=3^n(3^2-3-1)=3^n\cdot 5=M5$;
b) $a=2^{155}\cdot 5=(2^5)^{31}\cdot 5=32^{31}\cdot 5$; $b=3^{93}\cdot 5=(3^3)^{31}\cdot 5=27^{31}\cdot 5 \Rightarrow a>b$.

TESTUL O.5

1. $2^{1999}\cdot 3^{1999}\cdot 2^2+2^{1999}\cdot 3^{1999}\cdot 2-6^n=0 \Leftrightarrow 6^{1999}\cdot 4+6^{1999}\cdot 2-6^n=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6^{1999}\cdot 6-6^n=0 \Rightarrow n=2000$. **2.** $x+y=am+an+bm+bn=m(a+b)+$
$+n(a+b)=(a+b)(m+n)=5\cdot 6=30 \vdots 10$. **3.** $S=(2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+1)+$
$+(2\cdot 2+1)+\ldots+(2\cdot n+1)=2\cdot(1+2+3+\ldots+n)+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n+1 \text{ termeni}}=$
$=2\cdot[n(n+1):2]+(n+1)=n(n+1)+(n+1)=(n+1)(n+1)=(n+1)^2$.
4. Ecuația se scrie: $21x+1+2+\ldots+20=7x+350 \Leftrightarrow 21x+(20\cdot 21):2=$
$=7x+350 \Leftrightarrow 21x+10\cdot 21=7x+350 \Leftrightarrow 14x=140 \Leftrightarrow x=10$.

TESTUL O.6

1. Dacă $n\ge 5$, atunci $u(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)=0 \Rightarrow u(a)=3$ (F). Pentru $n<5$: $n=1$
$\Rightarrow 1+3=4=2^2$ (A); $n=2 \Rightarrow 2+3=5$ (F); $n=3 \Rightarrow 6+3=9=3^2$ (A);
$n=4 \Rightarrow 24+3=27$ (F). Deci $n\in\{1;3\}$. **2.** $2^{2\cdot 1000}-2^{1999}-2^{6\cdot 333}=2^{3\cdot n} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{2000}-2^{1999}-2^{1998}=2^{3n} \Leftrightarrow 2^{1998}\cdot(2^2-2-1)=2^{3n} \Leftrightarrow 2^{1998}=2^{3n} \Rightarrow n=666$.

3. Din egalitățile date deducem: $\left.\begin{matrix}x+y=5\\ y+z=7\\ x+z=6\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(x+y+z)=18 \Rightarrow x+y+z=9$;

$\left.\begin{matrix}x+y+z=9\\ x+y=5\end{matrix}\right\} \Rightarrow z=4$; $\left.\begin{matrix}x+y+z=9\\ y+z=7\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=2$; $\left.\begin{matrix}x+y+z=9\\ x+z=6\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=3$.

4. $2a-a=(2^{77}+2^{78}+\ldots+2^{103})-(2^{76}+2^{77}+\ldots+2^{102}) \Leftrightarrow a=2^{103}-2^{76}$;
$u(2^{103})=8$; $u(2^{76})=6 \Rightarrow u(a)=2\notin u(x^2)$, $x\in\mathbf{N}$.

TESTUL O.7

1. Notăm numărul fetelor cu $2x$. Atunci numărul băieților este $x+2$; $2x+x+$
$+2=35 \Leftrightarrow x=11 \Rightarrow$ fete sunt 22, băieți sunt 13; $22=7\cdot 3+1 \Rightarrow$ o zi cu 4 fete; $13=12\cdot 1+1 \Rightarrow$ o lună cu 2 băieți. **2.** $S=x+x+1+x+2+x+3+$
$+x+4=5x+10$; $510<5(x+2)<520 \mid :5 \Leftrightarrow 102<x+2<104 \Leftrightarrow 100<$
$<x<102$, $x\in\mathbf{N} \Rightarrow x=101$. Numerele sunt: 101, 102, 103, 104, 105. **3.** Fie x vârsta fiului. Peste trei ani tatăl va avea $6(x+3)$, iar peste 23 de ani va avea $2(x+23)$. Ecuația $6(x+3)+20=2(x+23) \Leftrightarrow 4x=46-38 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=$
$=2 \Rightarrow$ fiul are 2 ani, tatăl are $6(2+3)-3=27$ ani.

4. $\left.\begin{matrix}\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)=k^2\\ \overline{ab}-\overline{ba}=9(a-b)=t^3\\ a \text{ și } b \text{ sunt cifre}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a+b=11\\ a-b=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow a=7, b=4 \Rightarrow$ numărul 74.

TESTUL O.8

1. $a=49c+c=50c$, $r<49$; $1000<50c<2000 \mid :50 \Leftrightarrow 20<c<40$, $c\in\mathbf{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow c\in\{21, 22, \ldots, 39\}$;

$\left.\begin{matrix}a_1=50\cdot 21\\ a_2=50\cdot 22\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{19}=50\cdot 39\end{matrix}\right\} \Rightarrow S=50(21+22+\ldots+39)=50\cdot 570=28500$.

2. $n^2+n=(1999\cdot 2000):2-1000^2 \Leftrightarrow n^2+n=1999\cdot 1000-1000^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n^2+n=1000(1999-1000) \Leftrightarrow n(n+1)=1000\cdot 999 \Rightarrow n=999$.

3. $\overline{ab5}+\overline{ab}+\overline{a2b}=210a+12b+25=6\cdot 35a+6\cdot 2b+6\cdot 4+1=$
$=6\cdot \underbrace{(35a+2b+4)}_{c}+\underbrace{1}_{r} \Rightarrow r=1<6$.

4. $\frac{a}{b}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow b=3a$; $x=\frac{84a-3a}{2\cdot 3a-3a}=\frac{81a}{3a}=27=3^3$.

TESTUL O.9

1. $2a+5b=12c$; $2a=M2$; $12c=M2 \Rightarrow 5b=M2$; $5\ne M2 \Rightarrow b=M2$.

Egalitatea $2a + 5b = 12c$ se mai scrie: $5b = 12c - 2a = 2(6c - a)$; $5b = M5 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2(6c - a) = M5$; $2 \neq M5 \Rightarrow 6c - a = M5$. Atunci $b(6c - a) = M2 \cdot M5 =$ $= M10 \Rightarrow r = 0$.

2. $\frac{a}{b} = \frac{1+2+3+...+500}{4(1+2+3+...+500)} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 4a; x = \frac{5 \cdot 4a - 2a}{10a - 2 \cdot 4a} = \frac{18a}{2a} = 9 = 3^2 =$ p.p.

3. Dacă m şi n au aceeaşi paritate, atunci $m - n$ este par $\Rightarrow (m - n)(m + n + 1)$ este par. Dacă m şi n au parităţi diferite, atunci $m + n + 1$ este număr par $\Rightarrow$ $\Rightarrow (m - n)(m + n + 1) =$ par. Numărul 1999 este impar. Deci, nu există numerele naturale m şi n care să verifice egalitatea.

TESTUL O.10

1. Se observă că $a = M7$. Dar $399 = 7 \cdot 57$ şi $1 + 7 + 7^2 = 57$. Numărul a conţine 2001 termeni care pot fi grupaţi, câte trei, în $2001 : 3 = 667$ grupe; $a = 7(1 + 7 + 7^2) + 7^4(1 + 7 + 7^2) + ... + 7^{1999}(1 + 7 + 7^2) = 7 \cdot 57 + 7^4 \cdot 57 +$ $+ ... + 7^{1999} \cdot 57 = 7 \cdot 57 \underbrace{(1 + 7^3 + ... + 7^{1998})}_{A} = 7 \cdot 57 \cdot A = M3999$.

2. Pentru x = cifră impară $\Rightarrow x + 3 =$ număr par $\Rightarrow \frac{3xx}{x+3} \notin \mathbf{N}$.

Pentru $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ obţinem: $\frac{300}{3} = 100 \in \mathbf{N}$, $\frac{322}{5} \notin \mathbf{N}$, $\frac{344}{7} \notin \mathbf{N}$, $\frac{366}{9} \notin \mathbf{N}$ şi $\frac{388}{11} \notin \mathbf{N}$. Deci $A = \{0\}$. **3.** Pentru a avea fiecare elev câte patru bomboane mai avem nevoie de $3 \cdot 4 + 3 = 15$ bomboane. Lăsându-i, acum, cu câte trei bomboane, vom strânge (câte una de la fiecare) $15 + 7 = 22$ bomboane. Rezultă 22 de elevi. Numărul bomboanelor este: $22 \cdot 3 + 7 = 73$ sau $(22 - 4) \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 18 \cdot 4 + 1 = 73$. **4.** Fracţia se scrie:

$$\frac{12^n - 2^n \cdot 2 \cdot 3 + 3^n \cdot 3 \cdot 2^n - 18}{10} = \frac{2^n(6^n - 6) + 3(6^n - 6)}{10} = \frac{(6^n - 6)(2^n + 3)}{10}.$$

Pentru $n \in \mathbf{N}$, $u(6^n) = 6 \Rightarrow u(6^n - 6) = 0 \Rightarrow (6^n - 6)(2^n + 3) = M10$.

TESTUL O.11

1. Calculăm $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2000} \Rightarrow 2S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2001} \Rightarrow$ $\Rightarrow S = 2S - S = 2^{2001} - 2$. Ecuaţia se scrie: $2^{2001} - 2 = 2^{2000} \cdot x - 2^{2001} - 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^{2001} = 2^{2000}(x - 2) \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

2. Fie $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\frac{\overline{ab}}{3a + b} = n \Leftrightarrow \frac{10a + b}{3a + b} = n \Leftrightarrow 10a + b = 3a \cdot n + b \cdot n$

$\Leftrightarrow 10a - 3a \cdot n = b \cdot n - b \Leftrightarrow a(10 - 3n) = b(n - 1)$; b = cifră, $n - 1 \in \mathbf{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow b(n - 1) \in \mathbf{N} \Rightarrow a(10 - 3n) \in \mathbf{N}$; a = cifră $\Rightarrow 10 - 3n \in \mathbf{N} \Rightarrow n \in \{1, 2, 3\}$, $n = 1 \Rightarrow a \cdot 7 = b \cdot 0 \Rightarrow a = b = 0$ (F); $n = 2 \Rightarrow a \cdot 4 = b \cdot 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{14, 28\}$; $n = 3 \Rightarrow a \cdot 1 = b \cdot 2 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 42, 63, 84\}$. **3.** Inecuaţia se scrie: $3^n \cdot 81 +$ $+ 2 \cdot 3^n \cdot 9 + 3^n \le 2000 \Leftrightarrow 3^n(81 + 18 + 1) \le 2000 \Leftrightarrow 3^n \cdot 100 \le 2000 \Leftrightarrow 3^n \le$ $\le 20 \Rightarrow n \in \{0, 1, 2\}$. **4.** Ecuaţia se scrie: $3x - xy - 2y = 0 \Leftrightarrow x(3 - y) + 6 -$ $- 2y = 6 \Leftrightarrow x(3 - y) + 2(3 - y) = 6 \Leftrightarrow (3 - y)(x + 2) = 6$. Avem cazurile:

$\begin{cases} x + 2 = 1 \\ 3 - y = 6 \end{cases}$ (F); $\begin{cases} x + 2 = 2 \\ 3 - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$;

$\begin{cases} x + 2 = 3 \\ 3 - y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1$; $\begin{cases} x + 2 = 6 \\ 3 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 2$.

TESTUL O.12

1. Fracţia se scrie: $\frac{3^{6n}(81 - 27 - 29)}{3^{1998} \cdot 5} = \frac{3^{6n} \cdot 5}{3^{1998}} \in \mathbf{N}$ şi n fiind cel mai mic $\Rightarrow$ $\Rightarrow 3^{6n} = 3^{1998} \Rightarrow n = 333$. **2.** Cu teorema împărţirii cu rest avem: $a = 63 \cdot c + 34$ $\Leftrightarrow a = 21 \cdot 3c + 21 + 13 \Leftrightarrow a = 21(3c + 1) + 13 \Rightarrow r = 13 < 21$. **3.** Fie x, c, $c + 2$ şi r respectiv împărţitorul, câtul şi restul. Atunci $563 = xc + r$, $r < x$; $721 = x(c + 2) + r \Rightarrow 721 - 563 = 2x \Leftrightarrow x = 79$. Deci: $x = 79$, $c = 7$, $c + 2 = 9$, $r = 10$. **4.** Cu teorema împărţirii cu rest avem: $a = b \cdot 5 + 6$, $6 < b$; $a + b =$ $= b \cdot 5 + 6 + b = 6b + 6$; $b > 6 \Rightarrow b \ge 7 \Rightarrow 6b + 6 \ge 6 \cdot 7 + 6 = 48$. Egalitate avem când $b = 7 \Rightarrow a = 7 \cdot 5 + 6 = 41$.

TESTUL O.13

1. $2^a \cdot 3^b + 2^a + 3^b = 139 \Leftrightarrow 2^a(3^b + 1) + (3^b + 1) = 140 \Leftrightarrow (3^b + 1)(2^a + 1) =$ $= 140$. Dacă numerele a sau b sunt nule rezultă $2^a = 69$ (F) sau $3^b = 69$ (F). Rezultă că numerele a şi b sunt mai mari ca zero. Atunci $2^a + 1 > 3$ şi $3^b + 1 >$ > 4; $\underbrace{(3^b + 1)}_{\text{par}>4}\underbrace{(2^a + 1)}_{\text{impar}>3} = 140$. Se găseşte că $3^b + 1 = 28 \Rightarrow b = 3$; $2^a + 1 = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 2$. **2.** $\frac{\overline{xy}}{75} = \frac{1}{2x + y - z} \Leftrightarrow \overline{xy}(2x + y - z) = 75$. Avem cazurile:

a) $\begin{cases} \overline{xy} = 75 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = 5, z = 18$ (F); **b)** $\begin{cases} \overline{xy} = 25 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 5,$

$z = 6$ (A); **c)** $\begin{cases}\overline{xy}=15\\ 2x+y-z=5\end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 5, z = 2$ (A). **3.** $2^{376} = (2^8)^{47} = 256^{47}$; $17^{94} = (17^2)^{47} = 289^{47}$; $3^{230} < 3^{235} = (3^5)^{47} = 243^{47} \Rightarrow 3^{230} < 2^{376} < 17^{94}$. **4.** $a = 19(1 + 2 + 3 + \ldots + 18) = 19 \cdot \frac{18 \cdot 19}{2} = 19 \cdot 9 \cdot 19 = (19 \cdot 3)^2$;

$b = a(1 + 2 + 3 + \ldots + 15) = a \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = a \cdot 15 \cdot 8 = a \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 = k^3$, a = cel mai mic $\Rightarrow a = 3^2 \cdot 5^2 = 225$.

TESTUL O.14

1. Se pune condiția: $ab + 2a + b + 2 = 14 \Leftrightarrow a(b + 2) + (b + 2) = 14 \Leftrightarrow (a + 1)(b + 2) = 14$; $a, b \in \mathbf{N} \Rightarrow a + 1, b + 2 \in \mathbf{N}$. Avem cazurile:

$\begin{cases}a+1=1\\ b+2=14\end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 12$; $\begin{cases}a+1=2\\ b+2=7\end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 5$; $\begin{cases}a+1=7\\ b+2=2\end{cases} \Rightarrow a = 6, b = 0$;

$\begin{cases}a+1=14\\ b+2=1\end{cases} \Rightarrow b \notin \mathbf{N}$. **2.** $\frac{2000-k}{97} = n \in \mathbf{N} \Rightarrow 2000 - k = 97n \Leftrightarrow k = 2000 - 97n$, $k \geq 0 \Rightarrow 2000 - 97n \geq 0 \Leftrightarrow 2000 \geq 97n \Leftrightarrow n \leq \frac{2000}{97} \Leftrightarrow n \leq 20\frac{60}{97} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$. Numerele vor fi: $k_0 = 2000 - 97 \cdot 0$; $k_1 = 2000 - 97 \cdot 1$; $k_2 = 2000 - 97 \cdot 2$; …; $k_{20} = 2000 - 97 \cdot 20$; $S = k_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_{20} = 2000 \cdot 21 - 97(1 + 2 + 3 + \ldots + 20) = 2000 \cdot 21 - 97 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 21(2000 - 970) = 21630$. **3.** Cu teorema împărțirii cu rest avem: $a = 15 \cdot c_1 + 7$; $a = 12 \cdot c_2 + 3 = 3(4c_2 + 1) \Rightarrow a = M3 \Rightarrow \underbrace{a}_{M3} = \underbrace{15 \cdot c_2}_{M3} + 7 \Rightarrow 7 = M3$ (F). Nu există!

4. a) $(x + y)(x - y) = (x + y) \cdot x - (x + y) \cdot y = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$;

b) Fie $m, n \in \mathbf{N}$ pentru care

$\left.\begin{array}{l}a+11=m^2\\ a=n^2\end{array}\right\} \Rightarrow m > n$

$11 = m^2 - n^2 \Leftrightarrow 11 = (m + n)(m - n)$; $m, n \in \mathbf{N} \Rightarrow m + n, m - n \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow m + n = 11$

$\underline{m - n = 1}$

$2m = 12 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow a + 11 = 36 \Rightarrow a = 25 \Rightarrow 5a - 4 = 5 \cdot 25 - 4 = 125 - 4 = 121 = 11^2$.

TESTUL O.15

1. $A = \{2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.

2. a) $a = 8 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 75^n$; $b = 7 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 75^n \Rightarrow b > a$;

b) Calculăm $b - a = 75^n(7 \cdot 15 \cdot 25 - 8 \cdot 9 \cdot 25) = 75^n \cdot 5(7 \cdot 75 - 8 \cdot 45) = 75^n \cdot 5(525 - 360) \Rightarrow b - a = 75^n \cdot 5 \cdot 165 = M165 \Rightarrow r_1 = r_2$.

S-a folosit teorema împărțirii cu rest: $b = 165 \cdot c_1 + r_1$; $a = 165 \cdot c_2 + r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{b - a}_{M165} = \underbrace{165(c_1 - c_2)}_{M165} + r_1 - r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 = M165 < 165 \Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$.

3. $5 \cdot 7^n + 7^{2k} = 7^{2k}(5 \cdot 7^{n-2k} + 1) = p^2$; $7^{2k} = p.p. \Rightarrow 5 \cdot 7^{n-2k} + 1 = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot 7^{n-2k} = 35 \Rightarrow 7^{n-2k} = 7 \Rightarrow n = 2k + 1$.

4. $\overline{ab}^2 + \overline{ab}^3 = \overline{ab}^2(1 + \overline{ab}) = k^2 \Rightarrow 1 + \overline{ab} = p^2$ și cum $\overline{ab}$ este cel mai mic $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{ab} = 15$.

TESTUL O.16

1. $2002 = ac + 4 - a$; $0 \leq 4 - a < a$; $2 < a \leq 4 \Rightarrow a \in \{3, 4\}$; $a = 3 \Rightarrow c = 667$; $a = 4 \Rightarrow c \notin \mathbf{N}$. **2.** Cel mai mic număr de 5 cifre care începe cu 79 este 79000; $79000 = 179 \cdot 441 + 61 \Rightarrow 79118 = 179 \cdot 442$. Cel mai mare număr de 5 cifre care începe cu 79 este 79999; $79999 = 179 \cdot 446 + 165 \Rightarrow 79834 = 179 \cdot 446$. Numărul de numere de 5 cifre care încep cu 79 și se împart exact la 179 este $446 - 442 + 1 = 5$; $S = 397380$. **3.** $416 = 2^8 + 2^7 + 2^5$;

$\left.\begin{array}{l}3x+2=8\\ 2y+1=7\\ z=5\end{array}\right\} \Rightarrow x = 2, y = 3, z = 5$; $\left.\begin{array}{l}3x+2=8\\ 2y+1=5\\ z=7\end{array}\right\} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 7$;

$\left.\begin{array}{l}3x+2=5\\ 2y+1=7\\ z=8\end{array}\right\} \Rightarrow x = 1, y = 3, z = 8$. **4.** $u_{cf}[5b(b + 1)] = 0$; $u_{cf}(a) \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $u_{cf}(x) \in \{1, 5, 9\}$ (*); $y = c^{1001}(c^{1001} + 1)$; $c^{1001}(c^{1001} + 1)$ = număr par; $u_{cf}(y) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (**). Din (*) și (**) $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

TESTUL O.17

1. Din $2^{2n+2} \cdot 10^{n+1} - 10 \cdot 2^{3n} \cdot 5^n = 40^n \cdot 30 \Rightarrow 40^n \cdot 30 = 1200 \Rightarrow 40^n = 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow A = \{1\}$. Dar $111_{(2)} = 7$, $1101_{(2)} = 13$ și $7 \leq \overline{xx} \leq 13 \Rightarrow \overline{xx} = 11$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow B = \{1\} \Rightarrow A \cap B = \{1\} \Rightarrow$ A și B nu sunt disjuncte.

2. $10a + 17b = 400 \Rightarrow 10 \mid 400 - 10a \Rightarrow 10 \mid 17b \Rightarrow 10 \mid b$. Dacă $b \geq 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10a < 0$, fals $\Rightarrow b \in \{0, 10, 20\}$. Pentru $b = 0 \Rightarrow a = 40$; pentru $b = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 23; b = 20 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow A = \{80, 76, 72\}$ şi $S = 80 + 76 + 72 = 228$.

3. $1000 \le 222k^2 < 10000 \Rightarrow 1000 = 222 \cdot 4 + 112; 10000 = 222 \cdot 45 + 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 > 4; k^2 < 45 \Rightarrow k^2 \in \{9, 16, 25, 36\}$.

4. $\overline{(b+c)(a+c)(a+b)} = \overline{bca} + \overline{cab}; \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a+b+c)$.

Dar $(a+b+c) \mid \overline{abc} \Rightarrow (a+b+c) \mid \overline{bca} + \overline{cab}$.

TESTUL O.18

I. 1. $6 \cdot 9 : (3 + 5 - 2) = 9$. **2.** $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, deci cele 6 numere sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5. **3.** Paginile la care a fost deschisă cartea sunt numere naturale consecutive notate x şi $x + 1 \Rightarrow x + x + 1 \Rightarrow x + x + 1 = 295 \Rightarrow x =$ $= 147$. Deci numerele paginilor sunt: 147 şi 148. **4.** $\overline{xy} + \overline{yx} = 220 \Leftrightarrow (10x +$ $+ y) + (10y + x) = 220 \Rightarrow x + y = 20$. **5.** $a = 10^{20} = (10^2)^{10} = 100^{10} > 20^{10}$, $20^{10} = b \Rightarrow a > b$. **6.** $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{1, 2, 3\}$. **7.** $a = 6$. Ultima cifră a numărului $a^{2000} = 6^{2000}$ este 6. **8.** Din $1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5; 3 + 5 = 8$ $\Rightarrow 5 + 8 = 13$ şi $8 + 13 = 21$. **9.** $1^{2000} = 1 \to S; 5^{2^1} = 5^2 = 25 \to U; 2^4 = 16 \to$ $\to C; 4^2 = 16 \to C; 2^3 = 8 \to E; 2000^0 = 1 \to S$. Mesajul cifrat este SUCCES.

II. 1. $2^{1998}(17 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2^2) = 2^{1998}(34 - 6 - 8) = 2^{1998} \cdot 20 \vdots 10$.

2. $n \in \mathbf{N}, n = 5c_1 + 2 \Rightarrow 6n = 30c_1 + 12, c_1, c_2 \in \mathbf{N}; n = 6c_2 + 1 \Rightarrow 5n =$ $= 30c_2 + 5 \Rightarrow 6n - 5n = 30c_1 - 30c_2 + 12 - 5 \Rightarrow n = 30(c_1 - c_2) + 7; 0 \le 7 <$ $< 30 \Rightarrow$ restul împărţirii lui n la 30 este 7.

3. $A = B \Rightarrow$ I. $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}2a + 7 = 3a - 10 \Rightarrow a = 17, 17 \in \mathbf{N} \\ b^2 + 1 = 5 \Rightarrow b^2 = 4\end{array}\right\} \Rightarrow b = 2, 2 \in \mathbf{N} \\ b \in \mathbf{N}\end{array}\right\} \Rightarrow A = B = \{41, 5\}$

II. $\left.\begin{array}{l}2a + 7 = b^2 + 1 \\ 3a - 10 = 5 \Rightarrow a = 5 \\ 5 \in \mathbf{N}\end{array}\right\} \Rightarrow b^2 + 1 = 2 \cdot 5 + 7 \Rightarrow b^2 + 1 = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 16, b \in \mathbf{N} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow A = B = \{17, 5\}$. *Observaţie*: $2a + 7 \ne 5, a \in \mathbf{N}$.

TESTUL O.19

I. 1) $2^{13} : 2^{12} + 5^3 - 5^2 \cdot [3^6 : 3^5 + 16 : (63 - 55)] = 2 + 5^3 - 5^2(3 + 2) = 2$.

2) $\left[\left(\overline{abc} - \overline{bc}\right) : 100 + 10 \cdot b\right] : \overline{ba} = (a + 10b) : (10b + a) = 1$.

II. 1) $2^{24} \cdot x + 2^{27} = 2^{28} \Rightarrow 2^{24}(x + 8) = 2^{28} \Leftrightarrow x + 8 = 16 \Leftrightarrow x = 8$.

2) $A = 3^{30}(27 - 9 - 1) \Rightarrow A = 3^{30} \cdot 17 = 27^{10} \cdot 17$

$B = 2^{50}(16 + 1) = 2^{50} \cdot 17 = 32^{10} \cdot 17$

III. $x + y + z = 16; 50000x + 30000y + 10000z = 220000 \Rightarrow 5x + 3y + z = 22$ $\Rightarrow 4x + 2y + (x + y + z) = 22 \Rightarrow 4x + 2y = 6 \Leftrightarrow 2x + y = 3 \Rightarrow x = 1, y = 1, z = 14$.

IV. 1) $11 \mid \overline{abc} \Rightarrow 11 \mid 100a + \overline{bc} \Rightarrow 11 \mid 99a + a + \overline{bc} \Rightarrow 11 \mid a + \overline{bc}$.

2) $11 \mid (a + \overline{bc}); 11 \mid 99a \Rightarrow 11 \mid 99a + (a + \overline{bc}) \Leftrightarrow 11 \mid 100a + \overline{bc} \Rightarrow 11 \mid \overline{abc}$.

TESTUL O.20

1. 10. **2. a)** $a \in \{15, 17, 19, 27\}$; **b)** $a \in \{7\}$. **3.** $S_A + S_B = 10 \cdot 11 : 2 = 55$ nu se divide cu 2. **4.** $A = x^4 + \overline{y2}$ şi $u(A) \in \{2, 3, 7, 8\}$, deci A nu este pătrat perfect.

TESTUL O.21

1. $n = 1 + 6 + \ldots 0 + \ldots 0 + \ldots 0 \Rightarrow$ ultima cifră a numărului n este $7 \Rightarrow$ n nu este pătrat perfect. **2. a)** $p = 13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + 13^5 + 13^6 + 13^7 + 13^8 +$ $+ \ldots + 13^{1997} + 13^{1998} + 13^{1999} + 13^{2000} = (13 + 13^2 + 13^3 + 13^4) + 13^4(13 +$ $+ 13^2 + 13^3 + 13^4) + \ldots + 13^{1996}(13 + 13^2 + 13^3 + 13^4) = (13 + 13^2 + 13^3 +$ $+ 13^4)(1 + 13^4 + \ldots + 13^{1996}) = (13 + 169 + 2197 + 28561)(1 + 13^4 + \ldots +$ $+ 13^{1996}) = 30940(1 + 13^4 + \ldots + 13^{1996})$. Cum $30940 \vdots 10 \Rightarrow 30940(1 + 13^4 +$ $+ \ldots + 13^{1996}) \vdots 10 \Rightarrow p \vdots 10$; **b)** $13^{2001} = 13 \cdot 13^{2000} = (4 + 9) \cdot 13^{2000} =$ $= 4 \cdot 13^{2000} + 9 \cdot 13^{2000} = (2 \cdot 13^{1000})^2 + (3 \cdot 13^{1000})^2$. **3.** $10 \cdot \overline{xyz} + \overline{xyz} = 2002$ $\Rightarrow 11 \cdot \overline{xyz} = 2002 \Rightarrow \overline{xyz} = 182$. **4. a)** $A_4 = \{13, 15, 17, 19\}, A_5 = \{21, 23,$ 25, 27, 29}; **b)** Pe ce loc în şirul numerelor naturale impare este situat primul element din mulţimea A_{20}?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 1 = \frac{19(19+1)}{2} + 1 = \frac{19 \cdot 20}{2} + 1 = 190 + 1 = 191.$$

Care este primul element din mulţimea A_{20}?

$$1 + 190 \cdot 2 = 1 + 380 = 381.$$

Care este ultimul element din mulţimea A_{20}?

$$381 + 19 \cdot 2 = 381 + 38 = 419.$$

Care este suma elementelor mulţimii A_{20}?

$$\frac{(381+419) \cdot 20}{2} = \frac{800 \cdot 20}{2} = 8000.$$

TESTUL O.22

1. $A = \{15\}$. **2.** $ab(a + b) =$ nr. par; $ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) =$ nr. par; $2001 =$ nr. impar $\Rightarrow$ nu există numere a, b, c astfel încât $ab(a + b) +$ $+ ac(a + c) + bc(b + c) = 2001$. **3.** $\overline{xy} = 10; \overline{abc} = 987$. **4.** $a^{2n} = a^2 \cdot a^{2n-2} =$ $= (b^2 + c^2) \cdot a^{2n-2} = b^2 \cdot a^{2n-2} + c^2 \cdot a^{2n-2} = (ba^{n-1})^2 + (ca^{n-1})^2 \Rightarrow p = b \cdot a^{n-1}$ şi $q = c \cdot a^{n-1}$.

TESTUL O.23

1. a) $1060 = 61 \cdot 17 + 23$; **b)** $9966 = 61 \cdot 163 + 23$; **c)** 810411. **2.** $a = 2^{3775}$; $b = 2^{3775} - 1 \Rightarrow b < a$. **3.** b şi b^2 au aceeaşi paritate; c şi c^2 au aceeaşi paritate $\Rightarrow b + c$ şi $b^2 + c^2$ au aceeaşi paritate (1); a şi a + 1 au parităţi diferite; a^2 şi a + 1 au parităţi diferite (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ nu există numere a, b şi c astfel încât: $b + c = a + 1$ şi $b^2 + c^2 = a^2$.

TESTUL O.24

1. $1989 = 4 \cdot 497 + 1 \Rightarrow n = 1$; **2.** $A = 3^{2n+1} \cdot 5^{3n+2} - 3^{2n+2} \cdot 5^{3n+1} = 3^{2n+1} \cdot 5^{3n+1}(5 - 3) = 3 \cdot 9^n \cdot 5 \cdot 125^n \cdot 2 = 30 \cdot 9^n \cdot 125^n \Rightarrow A \vdots 30$; **3.** $a^2 \le 36 \Rightarrow a \le 6$, $a \ne 0 \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dacă $a = 1 \Rightarrow b \in \{1, 2, 3, 5, 8\}$. Dacă $a = 2 \Rightarrow b \in \{2, 5, 8\}$. Dacă $a = 3 \Rightarrow b \in \{3, 9\}$. Dacă $a = 4 \Rightarrow b = 2$. Dacă $a = 6 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \overline{ab} \in \{11, 12, 13, 15, 18, 22, 25, 28, , 33, 39, 42, 60\}$.

TESTUL O.25

1. a) $A = 4^{n+1} \cdot 5^{2n+3} - 2 = 2^{2n+2} \cdot 5^{2n+2} \cdot 5 - 2 = 10^{2n+2} \cdot 5 - 2 = \underbrace{10\ldots0}_{2n+2} \cdot 5 - 2 = 50\ldots0 - 2 = 49\ldots98$. Numărul A conţine cifra 9 de 2n+1 ori; b) $4 + \underbrace{9+\ldots+9}_{2n+1} + 8 = 9(2n + 1) + 12 = 18n + 9 + 12 = 18n + 21 = 3(6n + 7) \vdots 3$;

2. a) Cum $n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow U(6^n) = 6 \Rightarrow U(6^n + 2002) = 8 \Rightarrow 32\,506 \notin A$; $U(1995p) \in \{0, 5\} \Rightarrow U(1995p + 7) \in \{2, 7\} \Rightarrow 32\,506 \in B \Rightarrow 32\,506 \notin A \cup B$;

b) Cum $U(6^n + 2002) = 8$ şi $U(1995p + 7) \in \{2, 7\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

3. ●——● numărul de bile negre rămase în urnă

●——●——●——●——●——●——●——● numărul de bile albe rămase în urnă

●——● + 10 numărul iniţial de bile negre

●——●——●——●——● + 40 numărul iniţial de bile albe

●——●——●——●——●——●——● + 30 numărul iniţial de bile albe

$(40 - 30) : 2 = 5$ (bile negre au rămas în urnă)

$5 + 10 = 15$ (bile negre au fost la început în urnă)

$15 \cdot 4 = 60$ (bile albe au fost la început în urnă)

TESTUL O.26

1. Suma se scrie: $2\,000 \cdot 2\,001^p = 2 \cdot 10^3 \cdot 2\,001 \cdot 2\,001^{p-1} = 2 \cdot 10^3 \cdot 87 \cdot 23 \cdot 2\,001^{p-1}$ şi acest număr este divizibil cu $87 \cdot 10^3$.

2. $a = 1 + 2 + 2^2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1999})$ şi notăm $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1999} = k \Rightarrow a = 3 + 4k$, a este număr impar şi numerele de forma 4k + 3 nu sunt pătrate perfecte. Presupunem că a este pătrat perfect $\Rightarrow a = p^2$ cu p impar deoarece a este impar $\Rightarrow 4k + 3 = p^2 \Rightarrow 2(2k + 1) = (p - 1)(p + 1)$. Contradicţie deoarece $2(2k + 1) \not\vdots 4$ şi $(p - 1)(p + 1) \vdots 4$. Deci propoziţia este falsă.

3. $\overline{ab} = 10a + b = ab + a + b \Rightarrow 9a = ab \Rightarrow b = 9$ şi $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow A = \{19, 29, 39, \ldots, 99\} \Rightarrow \text{card } A = 9$. **4.** Dacă $d = (a, b) \Rightarrow d \mid a$ şi $d \mid b \Rightarrow d \mid (5b - 8a) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$. Cum $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$ şi $d = (a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = a \cdot b$.

TESTUL O.27

1. a) $\dfrac{\overline{xx9} + \overline{8x} + 7}{\overline{x9x} + \overline{x6}} = \dfrac{x \cdot 10^2 + x \cdot 10 + 9 + 8 \cdot 10 + x + 7}{x \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + x + x \cdot 10 + 6} = \dfrac{111x + 96}{111x + 96} = 1 \in \mathbf{N}$.

b) Scoţând factor comun în paranteză avem:

$2\,002 - (2\,000 \cdot 2\,001 + 2\,001) : 2\,001^2 = 2\,002 - 2\,001 \cdot 2\,001 : 2\,001^2 = 2\,002 - 2\,001^2 : 2\,001^2 = 2\,002 - 1 = 2\,001$.

2. $2\,001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ şi cum aceşti factori se găsesc în al doilea termen al sumei avem că restul împărţirii este 1.

3. Numerele naturale de 3 cifre multipli de 3 sunt: $34 \cdot 3 = 102$, $35 \cdot 3 = 105$, …, $333 \cdot 3 = 999$, ceea ce artă că numărul lor este $(333 - 34) + 1 = 300$. Căutăm multiplii lui 3 care nu sunt şi multiplii lui 2, rezultă că trebuie să eliminăm numerele care sunt multipli de 6. Numerele naturale de trei cifre multipli de 6 sunt: $17 \cdot 6 = 102$, $18 \cdot 6 = 108$, …, $166 \cdot 6 = 996$, ceea ce arată că numărul lor este $(166 - 17) + 1 = 150$. Sunt $300 - 150 = 150$ numere naturale de trei cifre care sunt multipli de 3 fără a fi multipli de 2.

4. Fiecare fracţie este supraunitară şi se poate scrie ca: $1 + \dfrac{k}{k+1}$, $k \in \mathbf{N}$.

Avem: $\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{1+0}{2+0}$; $\dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{2}{3} = 1 + \dfrac{1+1}{2+1}$; $\dfrac{7}{4} = 1 + \dfrac{3}{4} = 1 + \dfrac{2+1}{3+1}$; $\ldots \dfrac{4003}{2002} = 1 + \dfrac{2001}{2002} = 1 + \dfrac{2000+1}{2001+1}$. Folosim faptul că oricare ar fi a, b, $k \in \mathbf{N}$, $k \ne 0$ şi $a < b$ avem că $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+k}{b+k} \Rightarrow \dfrac{4003}{2002} > \dfrac{4001}{2001} > \ldots > \dfrac{7}{4} > \dfrac{5}{3} > \dfrac{3}{2}$.

PROBE DE EVALUARE

NIVELUL A

I. 1. a) 200036; **b)** 500005; **c)** 6000025. **2.** AB = 2, AC = 3, AD = 4, BE = = 3, CE = 2, DE = 1. **3. a)** 5016; **b)** 6813125; **c)** 1252350. **4. a)** 5; **b)** 20. **5. a)** $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}; **b)** $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, $A - B = \{2\}$, $B - A = \{5\}$. **II. 1.** XIX, XXXVIII, LXXV, CCCLXXXVII. **2.** 57. **3. a)** 83; **b)** 76; **c)** 1231; **d)** 6802. **4.** 342. **5. a)** 36; **b)** 0.

NIVELUL B

I. 1. a) 4 şi 6; **b)** AD = 4, CD = 2, CB = 3. **2. a)** 20; **b)** 18; **c)** 7. **3.** 1. **4.** Trei zerouri. **5. a)** 111; **b)** 1. **II. 1. a)** par **b)** 63. **2. a)** a = 3, b = 3, c = 1; **b)** a = 2, b = 2, c = 1 sau a = 2, b = 1, c = 2 sau a = 4, b = c = 1; **c)** a = 1, b = = 2, c = 3 sau a = 3, b = 2, c = 1 sau a = 9, b = 1, c = 1 sau a = 1, b = 1, c = 9. **3.** 1110_2; 11011_2; 101111_2. **4.** 13, 45, 39. **5.** 144.

NIVELUL C

I. 1. Ultima cifră este 2 sau 7 şi deci nu poate fi pătrat perfect. **2. a)** $\varnothing$, {c}, {d}, {c, d}; **b)** {a}, {b}, {a, b}, {a, c}; {a, d}, {b, c}, {b, d}, {b, c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {a, b, c, d}; **c)** {e}, {f}, {e, c}, {e, d}; {e, f}, {f, c}, {f, d}, {f, e}, {c, e, f}, {d, e, f}, {c, d, e}, {c, d, f}; {c, d, e, f}. **3.** $2^n + 2^{n+1} + + 2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4} + 2^{n+5} = 2^n + 2^n \cdot 2 + 2^n \cdot 2^2 + 2^n \cdot 2^3 + 2^n \cdot 2^4 + 2^n \cdot 2^5 = = 2^n(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 2^n(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 2^n \cdot 63 = 2^n \cdot 7 \cdot \cdot 3^2 \vdots 7$. **4.** Dacă a este deîmpărţitul şi b împărţitorul, atunci $a = b \cdot 5 + 2$ şi $2 < b$, $a < 100$. Numărul b ia una din valorile 3, 4, 5, ..., 19, în total 17. **5. a)** 2; **b)** 3; **c)** 7. **II. 1. a)** 95; **b)** 9, 10, 11, ..., 20. **2. a)** $A = \{7, 8, 9, ..., 24\}$ şi card A = 18; **b)** $A_1 = \{7, 8, 9, 10, 11\}$; $A_2 = \{7, 8, 9, 10, 12\}$; **c)** S = 279. **3.** $15^n + 3^n \cdot 5^n \cdot 5 + 3^n \cdot 5^n \cdot 5^2 = 15^n + 15^n \cdot 5 + 15^n \cdot 5^2 = 15^n \cdot (1 + 5 + 5^2) = = 15^n \cdot 31 \vdots 31$. **4.** Fie $\overline{abcde4}$ şi $\overline{abcde4} \cdot 4 = \overline{4abcde} \Rightarrow e = 6$, d = 5, c = 2, b = 0, a = 1 şi numărul este 102564. **5. a)** egale; **b)** $3^{40} \cdot 8 > 2^{63}$; **c)** $2^{36} < 3^{27}$.

MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE

LUCRAREA 1

I. 1. a) 9400; **b)** 9400. **2. a)** 156; **b)** 708. **3. a)** 7; **b)** 17.
II. 4. a) 16, 19; **b)** 64; **c)** 710. **5.** 3075, 3270, 3375, 3570, 3675, 3870, 3975.

LUCRAREA 2

I. 1. a) 7200; **b)** 7200. **2. a)** 182; **b)** 596. **3. a)** 3; **b)** 1.
II. 4. a) 18, 22; **b)** 62; **c)** 510. **5.** 5130, 5238, 5436, 5634, 5832.

LUCRAREA 3

I. 1. 34; **2.** 264; **3.** 8; **4.** 10; **5.** 4; **6.** 4^{10}; **7.** $100101_{(2)}$;
8. $a \cdot 10^5 + b \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b$; **9.** 2, 3, 4 şi 5.
II. 10. a) 30; **b)** 1; **11.** $\overline{a0ba0b} = 1001 \cdot \overline{a0b} : 1001$;
12. Nr. minim = 7; nr. maxim = 15.

LUCRAREA 4

I. 1. 50; **2.** 444; **3.** 16; **4.** 9; **5.** 3; **6.** 27^{11}; **7.** $101101_{(2)}$;
8. $a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10$; **9.** 3, 6, 9 şi 12.
II. 10. a) 60; **b)** 1; **11.** $\overline{ab0ab0} = 1001 \cdot \overline{ab0} : 1001$;
12. Nr. minim = 4; nr. maxim = 15.

LUCRAREA 5

1. a) 9646; **b)** 6020; **c)** 3. **2. a)** F; **b)** F; **c)** A; **d)** F; **e)** A; **f)** A; **g)** A; **h)** A.
3. 4. **4.** A = {a, b, c, e}, B = {a, c, f}.

LUCRAREA 6

I. 1. a) 23456; **b)** 40509; **c)** 800005. **2.** IV, IX, XXXIX, LVI, CV, ML, MMMCDXCVI. **II.** 4 sau 12. **III. a)** 0; **b)** 0. **IV. 1. a)** 3348; **b)** 1694; **c)** 150; **d)** 189. **2. a)** 0, 1, 2, 3, 4; **b)** 0, 1, 2, ..., 7; **c)** 0, 1, 2, 3; **d)** 9.

LUCRAREA 7

1. a) 16, 4, 512, 2048; **b)** n = 4 şi $2^{3n-5} = 2^{3 \cdot 4 - 5} = 2^7$; $2^{2n-1} = 2^{2 \cdot 4 - 1} = 2^7$. **2.** 857, 1025, 1193. **3. a)** 2435; **b)** 4; **c)** 1999^{1998}. **4.** $37_{(10)} = 100101_{(2)}$.

LUCRAREA 8

1. a) 0; **b)** 0; **c)** 10. **2.** A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 2, 4, 5}. **3.** 170, 152. **4.** 36, 81.

LUCRAREA 9

1. a) $M = \{4, 5, 6, \ldots, 14, 15\}$; $A = \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; $B = \{5, 10, 15\}$; $A \cap B = \{10\}$; $A - B = \{4, 6, 8, 12, 14\}$; $B - A = \{5, 15\}$; **b)** $\varnothing$, $\{5\}$, $\{10\}$, $\{15\}$, $\{5, 10\}$, $\{5, 15\}$, $\{10, 15\}$, $\{5, 10, 15\}$. **2.** 137. **3. a)** 1; **b)** 49. **4.** 45.

TESTE DE EVALUARE TIP EXAMEN DE CAPACITATE

TESTUL I

A. 1. 120. **2.** 4. **3.** $\{2, 4\}$. **4.** $x \in \{1, 3, 5\}$. **5.** 1 şi 5. **6.** falsă. **7.** 283. **8.** mai mare. **9.** 4.

B. 10. a) $\frac{x+1}{x}; \frac{x+2}{x}; \frac{x+2}{x+1}$; **b)** $\frac{x}{x}; \frac{x+1}{x+1}; \frac{x+2}{x+2}$; **c)** $\frac{x}{x+1}; \frac{x}{x+2}; \frac{x+1}{x+2}$.

11. a) par; **b)** 2, 7 şi 3 sau 7, 2 şi 3; **c)** Deoarece $\overline{abcdef}$ are tot atâtea cifre câte are $\overline{bcdefa}$, rezultă că $a \leq 3$. Pentru $a = 1$, ultima cifră a numărului $3 \cdot f$ este 1 şi deci $f = 7$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot e + 2$ este 7 şi deci $e = 5$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot d + 1$ este 5 şi deci $d = 8$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot c + 2$ este 8 şi deci $c = 2$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot b$ este 2, adică $b = 4 \Rightarrow a = 1$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 8$, $e = 5$, $f = 7$. Pentru $a = 2 \Rightarrow b = 8$, $c = 5$, $d = 7$, $e = 1$, $f = 4$. Pentru $a = 3$ nu avem soluţii.

12. a) 4221, 8442, 5226, 9447; **b)** $\frac{117}{21}; \frac{117}{51}; \frac{117}{81}; \frac{147}{24}; \frac{147}{54}; \frac{177}{27}; \frac{177}{57}; \frac{177}{87}$;

c) $12^n + 3^n \cdot 4^n \cdot 4 + 3^n \cdot 4^n \cdot 4^2 = 12^n + 12^n \cdot 4 + 12^n \cdot 16 = 12^n(1 + 4 + 16) = 12^n \cdot 21$ şi este divizibil cu 21.

TESTUL II

A. 1. 64, 66, 68. **2.** 3. **3.** 0, 5, 10, 15. **4.** 1. **5.** 42224. **6.** Cu 6 ani în urmă, adică în 1994. **7.** Este echivalentă cu cea anterioară. **8.** falsă. **9.** 2.

B. 10. $A = \{0, 1\}$, $B = \{2^0 + 3 \cdot 0, 2^1 + 3 \cdot 1\} = \{1, 5\}$, $C = \{(1 + 2)^0, (1 + 2)^1, (5 + 2)^1\} = \{1, 3, 7\}$ şi $A \cup B = \{0, 1, 5\}$, $A \cap C = \{1\}$, $B - C = \{5\}$, $A \cup (B - C) = \{0, 1, 5\}$, $C - (A \cap C) = \{3, 7\}$, $C \cap (A \cup B) = \{1\}$. **11. a)** 221; **b)** 221; **c)** 17901. **12. a)** $x + y = 2289$ şi $x = 17y + 111$, $111 < y \Rightarrow x = 2289 - y \Rightarrow 2289 - y = 17y + 111 \Rightarrow 18y = 2178 \Rightarrow y = 121$ şi $x = 2168$; **b)** Fie n numărul $\Rightarrow 200 < n < 300$ şi $n = 7c + 4$, $c \in \mathbf{N}$. Cum $200 = 7 \cdot 28 + 4 \Rightarrow$ cel mai mic număr căutat este $7 \cdot 29 + 4$ şi cum $300 = 7 \cdot 42 + 6 \Rightarrow$ cel mai mare număr căutat este $7 \cdot 42 + 4$. Deci numerele căutate sunt de forma: $7 \cdot c + 4$, unde $c \in \{29, 30, \ldots, 42\}$ şi deci sunt 14 numere; **c)** Din

teorema împărţirii cu rest, notând deîmpărţitul cu a, împărţitorul cu b, câtul cu c şi restul cu r, avem: $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$ şi $a - b = 1436 \Rightarrow a = 1436 + b \Rightarrow 1436 + b = 15b + 64 \Rightarrow 14b = 1372 \Rightarrow b = 98$ şi $a = 1534$, adică: $1534 = 98 \cdot 15 + 64$.

TESTUL III

A. 1. 418. **2.** Câtul este 1 şi restul 5. **3.** 1. **4.** $A = \{4, 5\}$, $B = \{4\}$, $C = \{3, 5\}$ sau $A = \{4, 5\}$, $B = \{4\}$, $C = \{3\}$ sau $A = \{4\}$. $B = \{4\}$, $C = \{3, 5\}$ sau $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4\}$, $C = \{3, 5\}$. **5.** 1. **6.** mai mic. **7.** 14. **8.** 3, 4, 5 sau 6. **9.** $b + c$, $b - c$.

B. 10. $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}; \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}; \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}$. **11. a)** Cel mai mic număr este $113 = 6 \cdot 17 + 11$ şi cel mai mare este $997 = 58 \cdot 17 + 11$. Numerele căutate sunt de forma $a \cdot 17 + 11$, unde $a \in \{6, 7, 8, \ldots, 58\}$, în total fiind 53 de numere; **b)** 12; **c)** Şirul numerelor naturale formate din două cifre este: 10, 11, 12, ..., 99 şi conţine $99 - 9 = 90$ (numere). Dintre acestea numai 81 au cifre distincte deoarece nouă au cifre egale 11, 22, 33, ..., 99. **12. a)** $N = 3^{n+2} \cdot 2^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2} = 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^{2n} \cdot 2^3 + 3^n \cdot 3^3 \cdot 4^n \cdot 4^2 = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 9 \cdot 8 + 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 27 \cdot 16 = 9 \cdot 8 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} \cdot (1 + 3 \cdot 2) = 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3^n \cdot 2^{2n}$ care este divizibil cu 7 şi 9, deci este divizibil cu 63; **b)** Se calculează ultima cifră a fiecărui termen şi avem $n(2^{111}) = 8$, $n(3^{222}) = 9$, $n(4^{333}) = 4$, $n(5^{444}) = 5$, $n(6^{555}) = 6$, $n(7^{666}) = 9$, $n(8^{777}) = 8$, $n(9^{888}) = 1 \Rightarrow n(N) = 5$; **c)** Numerele de două cifre care se divid cu 23 sunt: 23, 46, 69 şi 92 $\Rightarrow$ numerele căutate sunt: 4692, 6923 şi 46923.

TESTUL IV

A. 1. $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{2, 5, 8\} \Rightarrow B - (A \cap C) = \{0, 1\} - \{2\} = \{0, 1\}$. **2.** asociativitatea, comutativitatea, zero este element neutru la adunarea numerelor naturale. **3.** 7, 8, 9, 10. **4.** 15. **5.** 1. **6.** 128. **7.** 19. **8.** 10. **9.** 3.

B. 10. a) 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99; **b)** 111, 212, 313, 414, 515, 616, 717, 818, 919; **c)** 203, 230, 302, 320. **11. a)** prima cifră a lui A este 1, iar ultima este 8; prima cifră a lui B este 2, iar ultima este 7; **b)** Numărul A conţine cifra 9 de 74 de ori, iar numărul B de $n - 1$ ori; **c)** Numărul A are 76 de cifre, iar B are $n + 1$ cifre. **12. a)** Fie $\overline{xy}$ numărul. Avem $\overline{xy} = 3 \cdot (x + y) \Rightarrow 10x + y = 3x + 3y \Rightarrow 7x = 2y$. Cum $x \neq 0 \Rightarrow x = 2$, $y = 7$ şi numărul căutat este 27; **b)** Fie n numărul căutat, iar c_1, c_2 câturile celor două împărţiri $\Rightarrow \Rightarrow n = 16c_1 + 4 \Rightarrow$ n este număr par şi pe de altă parte $n = 16c_1 + 5 \Rightarrow$ n este

număr impar $\Rightarrow$ nu există număr natural cu aceste proprietăți; **c)** Șirul puterilor naturale ale lui 2 este: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... $\Rightarrow$ $400 = 256 + 144 = 256 + 128 + 16 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0$ $\Rightarrow 400_{10} = 110010000_2$.

TESTUL V

A. 1. $x = \{1, 2\}$, $y = \{3, 4\}$; $x = \{1, 2, 3\}$, $y = \{3, 4\}$; $x = \{1, 2\}$, $y = \{4\}$. **2.** p_2. **3.** 9. **4.** 13. **5.** 1002 și 2. **7.** 15 iepuri, 36 porumbei. **8.** $72 = 3^2 \cdot 2^3$ are $(2 + 1) \cdot (3 + 1) = 3 \cdot 4 = 12$ (divizori). **9.** 2 200 002.

B. 10. a) $4^n = 4^3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow 2^{2n+2} = 256$ și $2^{2n} = 4096$; **b)** 410;

c) $A = 900101\underbrace{00...0}_{n-2 \text{ zerouri}} - 1 = 900100\underbrace{99...9}_{n-2 \text{ cifre}}$.

11. a) $\frac{1}{x+y+z+t} = \frac{\overline{xyz}}{10^4} \Rightarrow \overline{xyz}(x+y+z+t) = 10^4$ sau $\overline{xyz}\,(x+y+z+t) = 2^4 \cdot 5^4$. Dar $\overline{xyz} \mid 2^4 \cdot 5^4 \Rightarrow \overline{xyz} \in \{100, 125, 200, 250, 400, 500, 625\}$. Făcând calculele obținem $\overline{xyz} = 625$ și $x = 6$, $y = 2$, $z = 5$, respectiv $t = 3$;

b) $\overline{a7} \cdot \overline{b7} = \overline{cc99}$, $\overline{cc99} \vdots 11 \Rightarrow \overline{a7} \vdots 11$ sau $\overline{b7} \vdots 7$. Dacă $11 \mid \overline{a7} \Rightarrow a = 7$ și $b = 8$ și analog $\Rightarrow$ numerele sunt 77 și 87; **c)** Fie $\overline{abcd}$ respectiv $\overline{dcba}$ numărul, respectiv răsturnatul său. Avem: $\overline{abcd} + \overline{dcba} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a = 1001a + 110b + 110c + 1001d = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a + 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot b + 11 \cdot 2 \cdot 5c + 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot d = 11 \cdot (7 \cdot 13a + 2 \cdot 5b + 2 \cdot 5c + 7 \cdot 13d) \vdots 11$.

12. a) $A = \overline{xxxyyy} = x \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + y \cdot 10 + y = 100000x + 10000x + 1000x + 100y + 10y + y = 111000x + 111y = 111(1000x + y) = 3 \cdot 37(1000x + y) \vdots 37$;

b) Dacă $x = y \Rightarrow A = 3 \cdot 37(1000x + x) = 3 \cdot 37 \cdot 10001x = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13x$ care se divide cu 7, 11 și 13.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

ȘCOALA ..... JUDEȚUL .....
PROFESOR ..... GRAD DIDACTIC .....

PLANIFICAREA CALENDARISTICĂ
CLASA A V-A

elaborată după programa școlară de matematică aprobată prin ordinul M.E.C. nr. 4237 din 28.08.1999, cu modificările ulterioare

I. PLANIFICAREA ANUALĂ

Număr săptămâni: 35
Număr ore săptămânal: 4
Total ore: $35 \times 4 = 140$

CONȚINUTURI	NUMĂR ORE	NUMĂR ORE PE SEMESTRU	
		I	II
A. Predare-învățare	**112**	**48**	64
I. Numere naturale			
Numere naturale	4	4	–
Operații cu numere naturale	28	28	–
Elemente de logică matematică	4	4	–
Mulțimi	12	12	–
II. Numere raționale			
Fracții	6	–	6
Fracții ordinare	4	–	4
Fracții zecimale	18	–	18
Numere raționale	10	–	10
III. Elemente de geometrie și unități de măsură			
Elemente de geometrie	16	–	16
Unități de măsură	10	–	10
B. Recapitularea și consolidarea cunoștințelor	**20**	**4**	**16**
C. Lucrări scrise semestriale	**8**	**4**	**4**
TOTAL ORE (A + B + C)	**140**	**56**	**84**

PLANIFICAREA SEMESTRIALĂ
Semestrul I

Număr săptămâni: 14
Număr ore săptămânale: 4
Total ore semestru: 14 × 4 = 56, din care:

- predare-învățare: 48
- recapitularea și consolidarea cunoștințelor: 4
- lucrări scrise semestriale: 4

Unitatea de învățare	Ob. de ref.	Conținuturi	Nr. de ore	Săptămâna
1	2	3	4	5
Numere naturale	1.1 1.3 3.1	1. Scrierea și citirea numerelor naturale; șirul numerelor naturale; Aproximări; rotunjiri	2	(1)
	3.2	2. Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Ordonarea numerelor naturale	1	
		3. Probă de evaluare	1	
Operații cu numere naturale	1.2 1.4 1.5 1.9	1. Adunarea numerelor naturale 2. Scăderea numerelor naturale Paranteze; ordinea efectuării operațiilor	2	(2)
	2.1 2.2 3.1	3. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu operații de adunare și scădere	2	(3)
	3.2	4. Înmulțirea numerelor naturale	2	
	3.3 4.1	5. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu operațiile studiate	2	(4)
	4.2	6. Împărțirea numerelor naturale	2	
		7. Ordinea efectuării operațiilor	2	(5)
		8. Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5	2	
		9. Numere pare și numere impare	2	(6)

		10. Ridicarea la putere *Reguli de calcul cu puteri	2	
		11. Compararea și ordonarea puterilor. Reguli de comparare	2	(7)
		12. Pătratul și cubul unui număr natural. *Pătrate perfecte	2	
		13. Ordinea efectuării operațiilor	2	(8)
		14. *Istoria evoluției sistemelor de scriere a numerelor *Baze de numerație	2	
Elemente de logică matematică	1.4 2.2 3.1	1. Propoziții adevărate și propoziții false 2. "Nu", "și", "sau", "dacă-atunci"	2 2	(10)
Mulțimi	1.4 2.2 3.1 3.2	1. Mulțime. Element. Relație de apartenență 2. Relații între mulțimi Submulțimi	2 2	(11)
	4.1 1.1	3. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimile **N** și $\mathbf{N}^*$. Mulțimea divizorilor și mulțimea multiplilor unui număr natural	2	(12)
		4. Mulțimea numerelor întregi	2	
		5. Operații cu mulțimi	2	(13)
		6. Probleme recapitulative	1	
		7. Probă de evaluare	1	
Lucrare scrisă semestrială	1.2 1.5 3.2	1. Pregătirea lucrării scrise 2. Lucrare scrisă 3. Discutarea lucrării scrise	2 1 1	(9)
Recapitularea și consolidarea cunoștințelor			4	(14)

Precizări

1. Planificarea calendaristică este un document administrativ utilizat de profesor în activitatea didactică desfăşurată la clasă şi are ca scop asigurarea parcurgerii integrale a programei şcolare atât la nivel de obiective de referinţă cât şi de conţinuturi.

- **unităţile de învăţare** sunt unitare din punct de vedere teoretic, se desfăşoară în mod sistematic şi continuu pe o perioadă de timp şi se finalizează prin evaluare;
- **obiectivele de referinţă** sunt cele prevăzute în programa şcolară şi numerotate pentru a fi uşor de identificat;
- **conţinuturile** selectate sunt cele extrase din lista de conţinuturi a programei;
- **numărul de ore alocat** a fost stabilit de autori pe baza experienţei dobândite de-a lungul anilor în munca la clasă.

2. Eventualele modificări determinate de aplicarea efectivă la clasă pot fi consemnate de profesor într-o fişă de "Observaţii".

3. Conţinuturile şi obiectivele de referinţă ale lecţiilor de recapitulare şi consolidare vor fi stabilite de profesor în săptămâna a XIII-a în funcţie de rezultatele evaluărilor.

II. OBIECTIVE DE REFERINŢĂ

1. Cunoaşterea şi înţelegerea conceptelor, a terminologiei şi procedurilor de calcul specifice matematicii.

La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

1.1. să scrie, să citească, să compare şi să reprezinte pe axă numere naturale, întregi, fracţionare şi zecimale;

1.2. să efectueze calcule conţinând adunări, scăderi, înmulţiri, împărţiri şi ridicări la putere, cu numere naturale, fracţionare şi zecimale, utilizând proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire, *precum şi **regulile de calcul cu puteri**;

1.3. să folosească aproximări ale numerelor naturale, fracţionare şi zecimale pentru a estima validitatea unor calcule;

1.4. să utilizeze elemente de logică şi de teoria mulţimilor pentru a justifica etape în rezolvarea unor probleme;

1.5. să utilizeze ecuaţii de tipul $x \pm a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$ ($a \neq b$), unde a şi b sunt numere naturale, în rezolvarea unor probleme;

1.6. să recunoască figuri şi corpuri geometrice; să deseneze figurile şi să construiască din diferite materiale corpurile cunoscute;

1.7. să folosească simetria şi translaţia pentru a construi modele geometrice; *să localizeze puncte de coordonate întregi într-un sistem de axe ortogonale;

1.8. să efectueze transformări între multiplii şi submultiplii principalelor unităţi din sistemul internaţional de măsuri (pentru lungime, arie, volum, masă şi timp); să estimeze măsuri ale unor obiecte din mediul apropiat;

1.9. să înregistreze, să clasifice şi să prezinte date sub formă de tabele şi diagrame statistice simple.

2. Dezvoltarea capacităţilor de explorare/investigare şi rezolvare de probleme

La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

2.1. să exploreze modalităţi de descompunere a numerelor naturale şi zecimale, folosind operaţiile studiate;

2.2. să investigheze valoarea de adevăr[1] a unei afirmaţii, prin construirea unor exemple;

2.3. să descopere, să recunoască şi să completeze succesiuni de numere asociate după reguli identificate prin observare;

2.4. să recunoască veridicitatea unor rezultate obţinute prin măsurare sau calcul;

2.5. să construiască probleme pornind de la un enunţ parţial sau de la un model (grafic sau formulă).

3. Dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic

La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

3.1. să identifice informaţiile esenţiale dintr-un enunţ matematic prezentat în diverse forme;

3.2. să prezinte clar, corect şi concis, oral sau în scris, metodele şi/sau operaţiile utilizate în rezolvarea unor probleme;

3.3. să-şi asume diverse roluri de învăţare în cadrul unui grup.

4. Dezvoltarea interesului şi a motivaţiei pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate

La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

4.1. să-şi formeze obişnuinţa de a exprima prin operaţii matematice anumite probleme practice;

4.2. să manifeste perseverenţă în rezolvarea unei probleme, să propună soluţii sau metode alternative de rezolvare.

[1] Se va opera cu termenii: adevărat, fals.

CUPRINS

	Enunțuri	Soluții
PROBLEME RECAPITULATIVE DIN CICLUL PRIMAR	5	139
NUMERE NATURALE		
1. Scrierea și citirea numerelor naturale; șirul numerelor naturale. Aproximări; rotunjiri	9	139
2. Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Ordonarea numerelor naturale	14	140
3. Adunarea numerelor naturale	17	142
4. Scăderea numerelor naturale. Paranteze; ordinea efectuării operațiilor	22	143
5. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu operații de adunare și scădere	26	144
6. Înmulțirea numerelor naturale	29	145
7. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu operațiile studiate	33	145
8. Împărțirea numerelor naturale	34	145
9. Ordinea efectuării operațiilor	38	146
10. Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5	41	146
11. Numere pare și numere impare	44	148
12. Ridicarea la putere. *Reguli de calcul cu puteri	47	149
13. Compararea și ordonarea puterilor. Reguli de comparare	51	149
14. Pătratul și cubul unui număr natural. *Pătrate perfecte	53	150
15. Ordinea efectuării operațiilor	57	151
16. *Istoria evoluției sistemelor de scriere a numerelor. *Baze de numerație	60	151
17. Propoziții adevărate și propoziții false	65	152
18. „Nu", „și", „sau", „dacă – atunci"	68	152
19. Mulțime. Element. Relația de apartenență	74	153
20. Relații între mulțimi. Submulțimi	77	154
21. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimile **N** și **N***. Mulțimea divizorilor și mulțimea multiplilor unui număr natural	80	155
22. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Reprezentarea pe axă	82	155
23. Operații cu mulțimi (reuniune, intersecție, *diferență)	85	156
24. Probleme recapitulative	89	157
NUMERE RAȚIONALE		
1. Fracție; reprezentarea fracțiilor cu ajutorul unor desene	93	158
2. Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare	96	159
3. Reprezentări echivalente ale fracțiilor. Fracții egale	98	160
4. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Șir de fracții egale. Număr rațional pozitiv	101	160
5. Aducerea fracțiilor la un numitor comun	104	161
TESTE RECAPITULATIVE	106	162
TESTE PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADELOR ȘCOLARE	114	169
PROBE DE EVALUARE	126	180
MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE	129	181
TESTE DE EVALUARE TIP EXAMEN DE CAPACITATE	134	182
PLANIFICAREA CALENDARISTICĂ CLASA A V-A	185	

Lucrare avizată de Comisia Națională de Matematică din Ministerul Educației și Cercetării cu nr. 36684/1996 și cu nr. 25216/1999 pentru folosirea în clasă și pregătirea suplimentară a elevilor.

Editura *PARALELA 45*
Frații Goleşti 128 - 130, Piteşti, 0300
Tel./fax: 0248 - 63.14.39, 63.14.92, 21.45.33

ISBN 973-593-740-9

Lei 45 000

000+2

...ea II

Sorin Peligrad
Sorin Simion
Dan Zaharia
Maria Zaharia

ARITMETICĂ
ALGEBRĂ
GEOMETRIE

clasa a V-a

CAPITOLUL NUMERE RAȚIONALE

6. Adunarea şi scăderea numerelor raționale pozitive

• Suma numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{m}{n}$ şi $\frac{k}{n}$ este numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{m+k}{n}$, adică: $\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=\frac{m+k}{n}$.

Exemplu: $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{1+5}{8}=\frac{6}{8}$

• Diferența dintre numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{m}{n}$ şi numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{k}{n}$, unde $m \geq k$, este numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{m-k}{n}$, adică: $\frac{m}{n}-\frac{k}{n}=\frac{m-k}{n}$.

Exemplu: $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{7-5}{8}=\frac{2}{8}$.

Observație. Dacă fracțiile nu au acelaşi numitor se aduc la acelaşi numitor prin amplificare sau simplificare.

Exercițiu rezolvat:

Calculați: a) $\frac{5}{3}+\frac{2}{6}$; b) $\frac{9}{4}-\frac{6}{8}$.

***Metoda I*:**

a) $\frac{^{2)}5}{3}+\frac{2}{6}=\frac{10}{6}+\frac{2}{6}=\frac{10+2}{6}=\frac{12}{6}=2$;

b) $\frac{^{2)}9}{4}-\frac{6}{8}=\frac{18}{8}-\frac{6}{8}=\frac{18-6}{8}=\frac{12^{(4}}{8}=\frac{3}{2}$.

***Metoda II*:**

a) $\frac{5}{3}+\frac{2^{(2}}{6}=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5+1}{3}=\frac{6}{3}=2$;

b) $\frac{9}{4}-\frac{6^{(2}}{8}=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{9-3}{4}=\frac{6^{(2}}{4}=\frac{3}{2}$.

Metoda III:

a) $\frac{6)5}{3}+\frac{3)2}{6}=\frac{30}{18}+\frac{6}{18}=\frac{30+6}{18}=\frac{36}{18}=2$;

b) $\frac{8)9}{4}-\frac{4)6}{8}=\frac{72}{32}-\frac{24}{32}=\frac{72-24}{32}=\frac{48^{(16}}{32}=\frac{3}{2}$.

Exerciții

1. Calculați:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$; e) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$; f) $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$; g) $\frac{3}{14}+\frac{8}{14}$;

h) $\frac{1}{3^2}+\frac{4}{9}$; i) $\frac{2}{45}+\frac{3}{45}$; j) $\frac{1}{a}+\frac{5}{a}$; $(a\in N^*)$; k) $\frac{1}{14}+\frac{5}{14}$; l) $\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 6}$;

m) $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{5}{3\cdot 4}$; n) $\frac{4}{3\cdot 31}+\frac{2}{3\cdot 31}$; o) $\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{5}{3\cdot 6}$.

2. Efectuați:

a) $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}$; b) $\frac{3}{7}+\frac{11}{7}$; c) $\frac{1}{8}+\frac{7}{8}$; d) $\frac{1}{18}+\frac{17}{18}$; e) $\frac{11}{15}+\frac{34}{15}$; f) $\frac{2}{19}+\frac{17}{19}$;

g) $\frac{2}{11}+\frac{20}{11}$; h) $\frac{7}{54}+\frac{11}{54}$; i) $\frac{31}{100}+\frac{69}{100}$; j) $\frac{73}{400}+\frac{327}{400}$; k) $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{19}{4\cdot 5}$;

l) $\frac{7}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{23}{2\cdot 3\cdot 5}$; m) $\frac{5}{7\cdot 8}+\frac{51}{7\cdot 8}$; n) $\frac{3}{25}+\frac{47}{25}$; o) $\frac{7}{2^2\cdot 3\cdot 5}+\frac{23}{2^2\cdot 3\cdot 5}$;

p) $\frac{5}{63}+\frac{8}{63}+\frac{37}{63}+\frac{13}{63}$; r) $\frac{7}{47}+\frac{12}{47}+\frac{18}{47}+\frac{10}{47}$; s) $\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{2^2\cdot 3^2}+\frac{19}{2^2\cdot 3^2}$.

3. Efectuați, axprimând de fiecare dată ce parte din întreg reprezintă rezultatul obținut:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; d) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$; e) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; f) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$;

g) $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 7}$; h) $\frac{3}{7\cdot 8}+\frac{4}{7\cdot 8}$; i) $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{9}{4\cdot 5}$; j) $\frac{1}{50}+\frac{11}{50}+\frac{13}{50}$;

k) $\frac{6}{125}+\frac{19}{125}$; l) $\frac{1}{54}+\frac{3}{54}+\frac{5}{54}+\frac{7}{54}+\frac{11}{54}$;

4. Scrieți ca sumă de numere raționale cu același numitor:

a) $\frac{5}{11}$; b) $\frac{7}{14}$; c) $\frac{35}{11}$; d) $\frac{7a}{17}$; e) $\frac{5a+1}{7a}$; f) $\frac{a+9}{a+7}$; g) $\frac{2a+11}{2a+7}$.

5. Scrieți numerele raționale $\frac{6}{7};\frac{18}{11};\frac{102}{64}$ ca sumă de numere raționale cu reprezentanți fracții cu același numărător. Indicați câte trei posibilități pentru fiecare.

6. Descompuneți în sumă de numere raționale cu reprezentanți fracții cu același numitor:

a) $\frac{7+11}{15}$; b) $\frac{12+3}{7}$; c) $\frac{117+153}{1735}$; d) $\frac{5+11+17}{23}$; e) $\frac{356+147+253}{2357}$;

f) $\frac{17+24+157+324}{1537}$; g) $\frac{100}{317}$; h) $\frac{523}{975}$; i) $\frac{1+2+3+...+50}{50}$;

j) $\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+(n-1)\cdot n}{n}$.

7. Fie fracția $\frac{5}{7}$. Scrieți această fracție ca sumă de două fracții cu numitorul 17. Câte posibilități sunt? Scrieți-le pe toate. Aceleași cerințe pentru fracțiile: a) $\frac{7}{17}$; b) $\frac{9}{17}$.

8. Să se calculeze numărul cu $\frac{115}{129}$ mai mare decât $\frac{87}{129}$.

9. Care este numărul cu $\frac{103}{235}$ mai mare decât $\frac{21}{235}$?

10. Calculați a + b + c, unde:

a) $a=\frac{1}{7}$; $b=\frac{5}{7}$; $c=\frac{9}{7}$; b) $a=\frac{15}{49}$; $b=\frac{18}{49}$; $c=\frac{16}{49}$.

11. Un muncitor realizează într-o zi $\frac{3}{17}$ dintr-o lucrare. A doua zi realizează cu $\frac{4}{17}$ mai mult decât în prima zi. Cât a realizat muncitorul în cele două zile la un loc?

12. Calculați:

a) $\frac{2a}{31}+\frac{17a}{31}+\frac{5a}{31}$; b) $\frac{a}{21}+\frac{17a}{21}+\frac{3a}{21}$; c) $\frac{13a}{43}+\frac{57a}{43}+\frac{16a}{43}$; d) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$

$a+b\neq 0$; e) $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}$, $a+b+c\neq 0$.

❒13. Completați tabelul următor efectuând calculele necesare:

a	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{31}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{62}$	$\frac{11}{155}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{93}$	$\frac{14}{37}$
$a+\frac{1}{5}$											
$\frac{7}{31}+a$											

❒14. Calculați:

a) $|-4|+\frac{|-3|}{|-6|}+|-9|+\frac{|-1|}{6}$; b) $\frac{1}{7}+\frac{3}{28}+\frac{10}{56}+\frac{|-4|}{112}$; c) $\frac{|-7|}{12}+\frac{15}{|-6|}+$

$+\frac{|-19|}{24}+\frac{|-1|}{|-48|}$; d) $\frac{|-3|}{a^2b}+\frac{|-5|}{ab^2}+\frac{|-1|}{ab}+\frac{|-7|}{a^2b^2}$, $ab\neq 0$.

❒15. Calculați a, b, c apoi aflați sumele: a + b, a + c, a + b + c, unde

$a=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$; $b=\frac{1}{20}+\frac{1}{50}+\frac{1}{100}$; $c=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}$.

❒16. Calculați:

a) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{4}+\frac{6}{7}$; c) $\frac{1}{27}+\frac{17}{54}$; d) $\frac{3}{29}+\frac{19}{145}$; e) $\frac{1}{20}+\frac{7}{180}+\frac{1}{9}+\frac{7}{15}$;

f) $\frac{2}{3}+\frac{5}{18}+\frac{7}{9}+\frac{11}{54}+\frac{7}{27}$; g) $\frac{1}{15}+\frac{11}{50}+\frac{7}{20}+\frac{19}{100}$; h) $\frac{5}{18}+\frac{7}{12}+\frac{2}{9}+\frac{17}{36}$;

i) $\frac{77}{150}+\frac{11}{50}+\frac{49}{300}+\frac{47}{100}$; j) $\frac{5}{32}+\frac{23}{64}+\frac{47}{128}+\frac{132}{256}$.

❒17. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{40}+\frac{3}{160}+\frac{7}{320}+\frac{5}{64}+\frac{29}{160}$; b) $\frac{4}{15}+\frac{7}{20}+\frac{11}{180}+\frac{5}{60}+\frac{17}{90}$;

c) $\frac{7}{12}+\frac{4}{96}+\frac{5}{48}+\frac{17}{24}+\frac{19}{32}$; d) $\frac{7}{90}+\frac{17}{18}+\frac{11}{30}+\frac{19}{45}+\frac{1}{15}+\frac{3}{10}$.

❒18. Calculați aducând fracțiile la același numitor:

a) $\frac{1}{3^2\cdot 7}+\frac{11}{3\cdot 7^2}$; b) $\frac{3}{7^2\cdot 11}+\frac{6}{7\cdot 11^2}$; c) $\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{2^3\cdot 3^3}$;

d) $\frac{7}{3\cdot 2^2\cdot 7}+\frac{5}{3^2\cdot 2\cdot 7}+\frac{11}{2\cdot 3\cdot 7}$; e) $\frac{1}{2^2\cdot 5}+\frac{7}{2^2\cdot 5^2}+\frac{9}{2\cdot 5^2}+\frac{11}{2\cdot 5}$;

f) $\frac{1}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{7}{10^4}$; g) $\frac{1}{3^2}+\frac{3}{11^2}+\frac{5}{3\cdot 11}+\frac{7}{3^2\cdot 11}+\frac{17}{3\cdot 11^2}+\frac{19}{2^2\cdot 11^2}$.

❒19. Calculați:

a) $\frac{1}{2003}+\frac{2}{2003}+\frac{3}{2003}+\frac{4}{2003}+\ldots+\frac{100}{2003}$;

b) $\frac{2}{2003}+\frac{4}{2003}+\frac{6}{2003}+\frac{8}{2003}+\ldots+\frac{100}{2003}$;

c) $\frac{1}{2003}+\frac{3}{2003}+\frac{5}{2003}+\frac{7}{2003}+\ldots+\frac{99}{2003}$.

❒20. Un număr este cu $\frac{11}{36}$ mai mare decât $\frac{7}{108}$. Calculați suma celor două numere.

❒21. Un muncitor lucrând singur termină o lucrare în 12 ore, altul în 6 ore, iar al treilea în 4 ore.

a) Cât efectuează într-o oră fiecare muncitor?

b) Cât lucrează într-o oră cei trei muncitori împreună?

c) Lucrând împreună cei trei muncitori termină lucrarea în câte ore?

❒22. O pompă umple un rezervor 9 minute, alta în 12 minute, iar a treia în 36 minute. Într-un minut a câta parte din rezervor umple cele trei pompe? Pot umple rezervorul cele trei pompe în 5 minute?

❒23. Efectuați:

a) $\frac{2}{11}+\frac{4}{11}+\frac{6}{11}+\frac{8}{11}+\ldots+\frac{88}{11}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

❒24. Efectuați: $\frac{3}{127}+\frac{6}{127}+\frac{9}{127}+\frac{12}{127}+\ldots+\frac{81}{127}$.

❒25. Calculați:

a) $\frac{11_{(3)}}{111_{(2)}}+\frac{22_{(4)}}{111_{(2)}}$; b) $\frac{14_{(5)}}{21_{(3)}}+\frac{30_{(4)}}{21_{(3)}}$; c) $\frac{175_{(8)}}{120_{(4)}}+\frac{311_{(6)}}{44_{(5)}}$;

d) $\frac{11_{(2)}}{111_{(3)}}+\frac{23_{(4)}}{111_{(3)}}+\frac{12_{(3)}}{111_{(3)}}$; e) $\frac{23_{(5)}}{12_{(3)}}+\frac{13_{(4)}}{12_{(3)}}+\frac{14_{(5)}}{12_{(3)}}$; f) $\frac{147_{(8)}}{132_{(4)}}+\frac{312_{(4)}}{132_{(4)}}+\frac{112_{(3)}}{132_{(4)}}$.

❒26. Calculați aducând fracțiile la același numitor:

a) $\frac{10_{(3)}}{111_{(2)}}+\frac{21_{(4)}}{10_{(2)}}$; b) $\frac{14_{(5)}}{21_{(3)}}+\frac{13_{(4)}}{12_{(3)}}$; c) $\frac{135_{(7)}}{120_{(4)}}+\frac{310_{(6)}}{44_{(5)}}$.

27. Efectuați:

a) $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}$; b) $\frac{17}{19}-\frac{7}{19}$; c) $\frac{7}{17}-\frac{1}{17}$; d) $\frac{5}{14}-\frac{2}{14}$; e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$; f) $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$;

g) $\frac{4}{9}-\frac{1}{3^2}$; h) $\frac{23}{45}-\frac{3}{45}$; i) $\frac{5}{a}-\frac{1}{a}$, $a\in\mathbb{N}^*$; j) $\frac{5}{2\cdot6}-\frac{1}{2^2\cdot3}$; k) $\frac{5}{3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4}$;

l) $\frac{4}{3\cdot31}-\frac{2}{3\cdot31}$; m) $\frac{5}{3\cdot6}-\frac{1}{2\cdot3^2}$.

28. Calculați:

a) $\frac{7}{6}-\frac{5}{6}$; b) $\frac{11}{7}-\frac{3}{7}$; c) $\frac{7}{8}-\frac{1}{8}$; d) $\frac{17}{18}-\frac{1}{18}$; e) $\frac{11}{15}-\frac{6}{15}$; f) $\frac{17}{19}-\frac{2}{19}$;

g) $\frac{20}{11}-\frac{2}{11}$; h) $\frac{11}{54}-\frac{7}{54}$; i) $\frac{69}{100}-\frac{31}{100}$; j) $\frac{327}{100}-\frac{73}{100}$; k) $\frac{19}{4\cdot5}-\frac{1}{2^2\cdot5}$;

l) $\frac{23}{2\cdot3\cdot5}-\frac{7}{6\cdot5}$; m) $\frac{51}{2^3\cdot7}-\frac{5}{7\cdot8}$; n) $\frac{47}{25}-\frac{3}{5^2}$; o) $\frac{23}{2^2\cdot3\cdot5}-\frac{7}{2^2\cdot3\cdot5}$;

p) $\frac{37}{63}-\frac{13}{63}$; r) $\frac{18}{47}-\frac{10}{47}$; s) $\frac{19}{2^2\cdot3^2}-\frac{5}{2^2\cdot3^2}$.

29. Descompuneți în diferență de numere raționale cu reprezentanți fracții cu același numitor:

a) $\frac{15-7}{15}$; b) $\frac{12-3}{7}$; c) $\frac{153-117}{1735}$; d) $\frac{17-11}{23}$; e) $\frac{356-253}{2357}$; f) $\frac{324-157}{1537}$

g) $\frac{10}{317}$; (dați cinci exemple).

30. Să se calculeze numărul cu $\frac{117}{123}$ mai mic decât $\frac{120}{123}$.

31. Care este numărul cu $\frac{71}{215}$ mai mic decât $\frac{107}{215}$?

32. Completați tabelul efectuând calculele necesare:

a	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{62}$	$\frac{11}{155}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{93}$	$\frac{14}{37}$
$a-\frac{1}{100}$											
$\frac{3}{4}-a$											

33. Efectuați:

a) $|-4|-\frac{|-3|}{|-6|}$; b) $\frac{|-19|}{24}-\frac{|-1|}{|-48|}$; c) $\frac{1}{|-7|}-\frac{|-4|}{119}$; d) $\frac{|-7|}{ab}-\frac{|-3|}{ab}$.

34. Suma a doi termeni este $\frac{2}{3}$ iar unul din termeni este $\frac{14}{27}$. Determinați celălalt termen.

35. Diferența a două numere este $\frac{29}{732}$, iar descăzutul este $\frac{12}{61}$. Calculați scăzătorul.

36. a) Cât trebuie adăugat numărului $\frac{5}{28}$ pentru a obține $\frac{1}{4}$?

b) Cu cât trebuie micșorat numărul $\frac{77}{144}$ pentru a obține $\frac{5}{12}$?

c) Cu cât este mai mic $\frac{2}{117}$ decât $\frac{5}{13}$?

37. Efectuați:

a) $\frac{22_{(4)}}{111_{(2)}}-\frac{11_{(3)}}{111_{(2)}}$; b) $\frac{30_{(4)}}{21_{(3)}}-\frac{14_{(5)}}{21_{(3)}}$; c) $\frac{23_{(5)}}{12_{(3)}}-\frac{13_{(4)}}{12_{(3)}}$; d) $\frac{23_{(4)}}{111_{(3)}}-\frac{11_{(2)}}{111_{(3)}}$;

e) $\frac{23_{(5)}}{12_{(3)}}-\frac{14_{(5)}}{12_{(3)}}$; f) $\frac{17_{(4)}}{12_{(3)}}-\frac{12_{(3)}}{111_{(3)}}$.

38. Calculați:

a) $\frac{21_{(4)}}{10_{(2)}}-\frac{10_{(3)}}{111_{(2)}}$; b) $\frac{14_{(5)}}{21_{(3)}}-\frac{13_{(4)}}{12_{(3)}}$; c) $\frac{310_{(6)}}{44_{(5)}}-\frac{135_{(7)}}{120_{(4)}}$.

39. Calculați aducând fracțiile la același numitor:

a) $\frac{21_{(4)}}{10_{(2)}}-\frac{10_{(3)}}{111_{(2)}}$; b) $\frac{13_{(4)}}{12_{(3)}}-\frac{14_{(5)}}{21_{(3)}}$; c) $\frac{310_{(6)}}{44_{(5)}}-\frac{135_{(7)}}{120_{(4)}}$.

40. Arătați că:

a) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$; b) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}$.

41. Calculați:

a) $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}$; b) $\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{7\cdot9}+\frac{2}{9\cdot11}$;

c) $\frac{3}{2\cdot5}+\frac{3}{5\cdot8}+\frac{3}{8\cdot11}+\frac{3}{11\cdot14}$; d) $\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+$

$+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+4)(n+5)}$.

7. Compararea fracțiilor

• Dintre două fracții care au același numitor este mai mare fracția cu numărătorul mai mare.

Prin urmare,

dacă $m > n$ atunci $\frac{m}{p} > \frac{n}{p}$.

• Dintre două fracții care au același numărător este mai mare fracția cu numitorul mai mic.

Prin urmare,

dacă $n < p$ atunci $\frac{m}{n} > \frac{m}{p}$.

• Fracția $\frac{m}{n}$ este mai mare decât fracția $\frac{p}{q}$ dacă $m \cdot q > n \cdot p$

• Dacă fracțiile nu au același numitor ele se aduc la același numitor.

Exemplu:

Comparați fracțiile:

a) $\frac{3}{10}$ cu $\frac{7}{10}$; b) $\frac{7}{3}$ cu $\frac{7}{5}$; c) $\frac{11}{24}$ cu $\frac{7}{43}$.

Soluție:

a) Cum $3 < 7 \Rightarrow \frac{3}{10} < \frac{7}{10}$

b) Cum $3 < 5 \Rightarrow \frac{7}{3} > \frac{7}{5}$

c) Cum $11 \cdot 43 = 473$, $24 \cdot 7 = 168$ și $473 > 168 \Rightarrow \frac{1}{24} > \frac{7}{43}$.

Exerciții

❒1. Scrieți următoarele fracții în ordine crescătoare:

a) $\frac{1}{7};\frac{5}{7};\frac{2}{7};\frac{11}{7}$; b) $\frac{2}{9};\frac{5}{9};\frac{3}{9};\frac{7}{9}$; c) $\frac{2}{17};\frac{17}{17};\frac{5}{17};\frac{20}{17};\frac{3}{17}$;

d) $\frac{9}{10};\frac{9}{2};\frac{9}{4};\frac{9}{14};\frac{9}{1}$; e) $\frac{11}{3};\frac{11}{7};\frac{11}{17};\frac{11}{20}$; f) $\frac{5}{8};\frac{5}{11};\frac{5}{7};\frac{5}{9}$;

g) $\frac{a}{x};\frac{b}{x};\frac{c}{x}$, unde a, b, c, x ∈ **N*** și $a > c > b$;

h) $\frac{x}{a};\frac{x}{b};\frac{x}{c}$, unde a, b, c, x ∈ **N*** și $a < b < c$.

❒2. Comparați următoarele fracții:

a) $\frac{3}{7}$ și $\frac{5}{7}$; b) $\frac{14}{11}$ și $\frac{14}{17}$; c) $\frac{8}{5}$ și $\frac{3}{4}$; d) $\frac{17}{31}$ și $\frac{12}{19}$; e) $\frac{74}{29}$ și $\frac{31}{31}$; f) $\frac{|-4|}{15}$ și $\frac{1}{|-10|}$; g) $\frac{1}{10}$ și $\frac{1}{100}$; h) $\frac{1}{2^3\cdot5}$ și $\frac{3}{120}$; i) $\frac{2002}{2003}$ și $\frac{2003}{2004}$.

❒3. Ordonați descrescător numerele raționale:

a) $\frac{4}{7};\frac{7}{4};\frac{3}{4};\frac{4}{3};\frac{|-7|}{3}$; b) $\frac{2^2}{19};\frac{3\cdot5}{9+10};\frac{3^2\cdot5\cdot5^0}{7+12}$.

❒4. Mihaela a făcut ordine în cameră timp de $\frac{3}{4}$ ore, apoi și-a făcut temele la matematică timp de $\frac{7}{8}$ ore. Care din activități a durat mai mult?

❒5. Scrieți și completați propozițiile următoare înlocuind ☐ cu semnele „<“ sau „>“.

a) Dacă $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ atunci a ☐ c.

b) Dacă $\frac{b}{c} > \frac{a}{c}$ atunci b ☐ a.

c) Dacă $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$ atunci b ☐ a.

d) Dacă $c > b$ atunci $\frac{c}{a}$ ☐ $\frac{b}{a}$.

❒6. a) Care dintre numerele $\frac{16}{5}$ și $\frac{19}{6}$ este mai aproape de 3?

b) Care dintre numerele $\frac{29}{7}$ și $\frac{45}{11}$ este mai departe de 4?

❒7. Aflați între ce numere naturale consecutive este cuprinsă fiecare dintre fracțiile: $\frac{17}{4};\frac{5}{2};\frac{27}{10};\frac{49}{11}$.

❒8. Determinați mulțimile:

$A=\left\{\frac{a}{12}, a\in N \middle| \frac{4}{9}\le\frac{a}{12}\le\frac{14}{15}\right\}$

$B=\left\{\frac{15}{a}, a\in N^* \middle| \frac{10}{3}\le\frac{15}{a}\le\frac{20}{3}\right\}$.

❒9. Comparați fracțiile:

a) $\frac{2^7\cdot(2^3)^2\cdot(2^5)^3}{(3^3)\cdot 3^{10}}$ și $\frac{16^2\cdot 32^4}{(9^2)^4\cdot 3^9:(81)^2}$;

b) $\frac{(3^3)^2\cdot 27^2:3^3}{25^2:5^3\cdot(5^4)^3}$ și $\frac{3^9\cdot 27^2\cdot 3:(3^2)^8}{(25^2)^2\cdot 125^4:5^8}$.

❒10. Aflați numeele naturale nenule n, astfel încât:

a) $\frac{9}{5}<\frac{n}{5}<\frac{14}{5}$; b) $\frac{4}{11}<\frac{4}{n}<\frac{4}{3}$; c) $\frac{3}{5}<\frac{n}{12}<\frac{14}{15}$.

❒11. Dacă x este număr natural nenul, care dintre numerele:

a) $\frac{x}{x+1}$ și $\frac{x+1}{x}$; b) $\frac{x}{x+1}$ și $\frac{x+1}{x+2}$

este mai mare?

❒12. Aflați valorile lui n pentru care avem:

a) $\frac{1}{5}<\frac{1}{2n+1}<1$; b) $\frac{4}{3}<\frac{3}{3n-1}<2$.

❒13. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{14x}}{2y0}$, unde $\overline{14x}\vdots 5$, $\overline{2y0}\vdots 3$ și ordonați-le descrescător.

❒14. Aflați cea mai mare fracție de forma $\frac{\overline{2x}}{72y}$ știind că $\overline{2x}$ este număr prim și $\overline{72y}$ este divizibil cu 3.

❒15. Fie fracția de forma $\frac{\overline{1x2}}{y12}$, unde $\overline{1x2}\vdots 3$ și $\overline{y12}\vdots 2$.

a) Care este cea mai mică fracție de această formă?

b) Care este cea mai mare fracție de această formă?

❒16. Comparați fracțiile:

a) $\frac{2^{15}}{3^{14}}$ și $\frac{3^8}{2^{18}}$; b) $\frac{3^{18}}{2^{20}}$ și $\frac{2^{31}}{3^{16}}$; c) $\frac{5^{23}}{3^{31}}$ și $\frac{3^{26}}{5^{15}}$; d) $\frac{2^{17}}{5^9}$ și $\frac{5^{21}}{2^{58}}$.

❒17. Comparați fracțiile: $\frac{2^{2^{3^2}}}{3^{3^2}}$ și $\frac{3^{2^{3^2}}}{4^{2^{3^2}}}$.

❒18. Aflați valorile lui x număr natural astfel încât: $\frac{2^3\cdot 2^x}{9\cdot 3^3}<\frac{2^6}{3^6:3}$.

❒19. Determinați $x\in N^*$ pentru care sunt adevărate relațiile:

a) $\frac{2}{x}>\frac{x}{9}$; b) $\frac{x}{3}<\frac{15}{x}$; c) $\frac{3}{8}<\frac{2}{x+4}$; d) $\frac{21}{3x+14}>\frac{1}{2}$;

e) $\frac{7}{x+2}>\frac{5}{9}$; f) $\frac{x^2}{40}<\frac{8}{5}$; g) $\frac{x^2-11}{2}<\frac{7}{1}$; h) $\frac{x+3}{4}>\frac{7}{5}$.

8. Scrierea fracțiilor cu numitori puteri ale lui 10 sub formă zecimală. Rotunjiri.

Numerele $\frac{25}{10}; \frac{7}{10}; \frac{125}{100}; \frac{37}{1000}$ se mai scriu $\frac{25}{10^1}; \frac{7}{10^1}; \frac{125}{10^2}; \frac{37}{10^3}$ și sunt fracții cu numitori puteri ale lui 10. Sub ***formă zecimală*** ele se scriu 2,5; 0,7; 1,25; 0,037.

O ***fracție zecimală*** este formată din ***partea întreagă*** și ***partea zecimală***, despărțite de virgulă. Prima cifră din stânga virgulei este cifra ***unităților***, a doua cifra ***zecilor***, a treia cifra ***sutelor***, urmează cifra ***miilor, zecilor de mii, sutelor de mii, milioanelor*** ș. a. m. d. iar în dreapta virgulei avem cifra ***zecimilor, sutimilor, miimilor, zecimi de miimi, sutimi de miimi, milionimi*** ș. a. m. d.

Cifrele care formează partea zecimală a unei fracții zecimale se numesc ***zecimale***.

Observații:

1. Fracția $\frac{5}{10}=0,5$ se citește *cinci zecimi* sau *zero virgulă cinci* sau *zero întregi și cinci zecimi.*

Fracția $\frac{123}{10}=12,3$ se citește *123 zecimi* sau *12 întregi și 3 zecimi* sau *12 virgulă 3.*

Fracția $\frac{21873}{1000}=21,873$ se citește *21 873 miimi* sau *21 întregi și 873 miimi* sau *21 întregi, 8 zecimi, 7 sutimi, 3 miimi* sau *21 virgulă 873.*

2. Se pot scrie oricâte zerouri la dreapta unei fracții zecimale, fără ca fracția să se schimbe.

Exemplu: 2,17 = 2,170 = 2,1700 = 2,1700...

3. Dacă toate cifrele părții zecimale sunt nule, zerourile părții zecimale și nici virgula nu se mai scriu.

Exemplu: 21,00 = 21; 42,000 = 42.

4. Trebuie făcută distincție între ***cifra*** *zecimilor*, *sutimilor*, *miimilor* și ***numărul*** *zecimilor*, *sutimilor*, *miimilor*.

Exemplu: În fracția zecimală 3,25 ***cifra*** *zecimilor* este 2, ***cifra*** *sutimilor* este 5, ***numărul*** *zecimilor* este 32, ***numărul*** *sutimilor* este 325.

Măsurând lățimea băncii, Costin găsește 56,9 cm iar Alexandra 57,2 cm. În acest caz se ***rotunjește*** rezultatul măsurătorii la centimetrul cel mai apropiat, adică 57 cm.

Când se ***rotunjește*** un număr zecimal, ultima cifră pe care o reținem este neschimbată dacă este urmată de 0, 1, 2, 3 sau 4 și este mai mare cu 1 dacă este urmată de 5, 6, 7, 8 sau 9.

Pentru fracția zecimală 14,513 avem: $14 < 14{,}513 < 15$.

Se spune că 14 ***aproximează*** fracția zecimală 14,513 ***cu o unitate prin lipsă*** și 15 ***aproximează cu o unitate prin adaos***.

Putem scrie: $14{,}5 < 14{,}513 < 14{,}6$ adică 14,5 ***aproximează*** pe 14,513 ***cu o zecime prin lipsă*** și 14,6 ***aproximează cu o zecime prin adaos***.

Putem scrie: $14{,}51 < 14{,}513 < 14{,}52$, adică 14,51 ***aproximează*** pe 14,513 ***cu o sutime prin lipsă*** și 14,52 ***aproximează cu o sutime prin adaos***.

Exerciții

❒**1.** Folosind modelul: *4,376 m se citește 4m, 3 dm, 7 cm, 6 mm*

a) citiți: 3,4 m; 3,57 m; 2,759 m; 4,08 m; 0,037 m; 3,007 m;

b) încadrați lungimile de la punctul a) între două numere naturale consecutive.

❒**2.** Folosind denumirile: $\frac{1}{10}$ se citește ***o zecime***; $\frac{1}{100}$ se citește ***o sutime***, $\frac{1}{1000}$ se citește ***o miime***, citiți numerele: $\frac{5}{10}; \frac{17}{10}; \frac{156}{10}; \frac{15}{100}; \frac{127}{100}; \frac{1973}{100}; \frac{7}{100}; \frac{19}{1000}; \frac{129}{1000}$.

❒**3.** Folosind *Observația 1* citiți: 0,7; 1,4; 28,147; 0,00027.

❒**4.** Copiați și completați tabelul:

Șapte întregi și douăzeci și unu sutimi	7,21	$7+\frac{2}{10}+\frac{1}{100}$	$7+\frac{21}{100}$	$\frac{721}{100}$
	28,123			
		$4+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{100}$		
			$12+\frac{345}{1000}$	
	123,745			
				$\frac{14317}{100}$
douăzeci și cinci întregi și paisprezece sutimi				
		$5+\frac{7}{100}+\frac{4}{1000}$		

❒**5.** Folosind modelul:

7 dm = $\frac{7}{10}$ m = 0,7 m; 7 cm = $\frac{7}{100}$ m = 0,07 m; 7 mm = $\frac{7}{1000}$ m = = 0,007 m; 7 m și 7 dm = $7\frac{7}{10}$ m = 7,7 m, exprimați în metri:

a) 29 cm; b) 473 mm; c) 7 m și 27 cm; d) 17 m și 573 mm;
e) 5 m și 4 cm; f) 2m și 7 mm; g) 15 m și 98 mm; h) 2 m și 137 mm.

❒**6.** Citiți în două moduri următoarele fracții zecimale:

a) 23,57; b) 1,737; c) 437,154; d) 1007,0043; e) 0,237;
f) 0,001; g) 42,1457; h) 0,5437; i) 14758,23.

❒**7.** Scrieți sub formă de fracții zecimale:

a) 43 întregi și 12 sutimi; b) 10 întregi și 3 miimi;
c) 4 sutimi; d) 123 întregi și 237 miimi;
e) 937 miimi; f) 49 zecimi.

❒**8.** Scrieți sub formă de fracție zecimală:

a) 2m și 47 mm; 5 m și 4 cm; 123 cm; 5 mm;
b) 4 l și 59 cl; 6 l și 4 cl; 17 dl; 8 cl; 123 ml;
c) 5 g și 50 mg; 14 g și 4 cg; 147 mg; 1 kg și 4 mg.

❒**9.** În tabelul de mai jos completați căsuțele libere:

Fracția zecimală	Cifra zecimilor	Numărul zecimilor	Cifra sutimilor	Numărul sutimilor	Cifra miimilor	Numărul miimilor
47,29						
0,457						
3,479						

4,9						
1,24						
24,560						
94,2						
0,004						
15,401						
8,017						

10. Copiați fracțiile zecimale următoare și subliniați cu o linie partea întreagă și cu două linii partea zecimală:
73,357; 49; 0,5007; 237,43; 1257,1043; 0,0001.

11. Scrieți cu virgulă:

a) $\frac{4}{10}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{143}{10}$; $\frac{2003}{10}$; $\frac{10}{10}$; $\frac{50001}{10}$;

b) $\frac{3}{100}$; $\frac{47}{100}$; $\frac{435}{100}$; $\frac{123}{10^2}$; $\frac{1475}{10^2}$; $\frac{7}{10^2}$;

c) $\frac{7}{1000}$; $\frac{54}{10^3}$; $\frac{147}{10^4}$; $\frac{1437}{1000}$; $\frac{5}{10^5}$; $\frac{43}{10000}$.

12. Citiți numerele în cel puțin două moduri:
a) 0,1; 1,1; 0,01; 1,01; 0,001; 1,001; 0,0001; 1,0001;
b) 3,57; 0,817; 45,123; 103,7; 1001,33417; 7,123457;
c) $\frac{5}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{45}{1000}$; $\frac{401}{10000}$; $\frac{112}{100000}$; $\frac{3}{10^3}$; $\frac{17}{10^4}$; $\frac{305}{10^5}$; $\frac{104}{10}$.

13. Se dau următoarele numere zecimale:
7; 3,4; 7,23; 5,41; 11; 38,012; 56,904; 132,95; 8; 3807,001.
a) Scrieți mulțimea care are ca elemente părțile întregi ale acestor numere;
b) Scrieți mulțimea care are ca elemente părțile zecimale ale acestor numere.
c) Scrieți mulțimea care are ca elemente sutimile numerelor date.

14. Scrieți următoarele numere zecimale:
a) 5 întregi și 4 zecimi; b) 17 întregi și 7 sutimi; c) 5 sutimi;
d) 3 întregi, 4 zecimi și 3 sutimi; e) 4 miimi; f) 124 milionimi;
g) 41 de miimi; h) 4 zecimi, 5 miimi și 8 zecimi de miimi;
i) 43 virgulă 132; j) 6 virgulă 48; k) 4573 miimi.

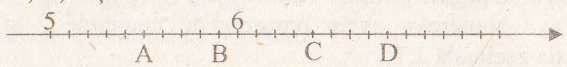
15. Rotunjiți:
a) 4,59; 7,33; 1,41; 5,25 la zecimea cea mai apropiată;
b) 0,168; 5,709; 45,723; 1,145 la sutimea cea mai apropiată;
c) 1,147; 9,754; 35,543; 11,107 la întregul cel mai apropiat.

16. Aproximați 21,567; 0,309; 2,017; 0,0015
a) prin adaos cu o unitate, o zecime, o sutime;
b) prin lipsă cu o unitate, o zecime, o sutime.

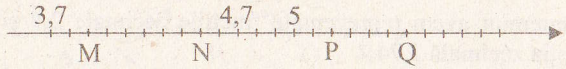
17. Rotunjiți numerele zecimale
4,3876; 14,517; 0,333; 1,0041; 5,72; 0,0107:
a) la un număr zecimal cu două zecimale;
b) la un număr natural.

18. Rotunjiți pe rând numerele: 92573,3717; 47,123; 41375,14237; 95047,0123; 0,14 la cea mai apropiată: a) sută; b) zece; c) unitate; d) zecime; e) miime; f) zecime de miime.

19. a) Precizați coordonatele punctelor A, B, C și D din figura:
b) Precizați aproximațiile prin lipsă și prin adaos, cu o unitate a numerelor A, B, C și D.



20. a) Care numere zecimale corespund punctelor M, N, P și Q de pe axa:



b) Precizați aproximațiile prin lipsă și prin adaos cu o unitate a coordonatelor punctelor M, N, P, Q.
c) Precizați aproximațiile prin lipsă și prin adaos cu o zecime a coordonatelor punctelor.

21. Scrieți numere zecimale cu cel mult:
a) trei zecimale cuprinse între 7,93 și 7,94;
b) patru zecimale cuprinse între 14,123 și 14,124.

22. Fie numerele: 17,05; 307,19; 1,24; 0,04; 7,001; 80,147.
a) Scrieți aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât o unitate.
b) Scrieți aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât o zecime.
c) Scrieți aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât o sutime.

9. Compararea, ordonarea, reprezentarea pe axă a numerelor raționale scrise sub formă zecimală

- Pentru a compara două fracții zecimale finite se compară mai întâi părțile lor întregi, ***cea mai mare fiind cea cu partea întreagă mai mare***.

Exemplu: 21,307 > 17,4597 deoarece 21 > 17.

Dacă părțile întregi sunt egale, atunci se compară părțile zecimale.

Exemple: a) 24,47 > 24,45 deoarece 47 > 45;

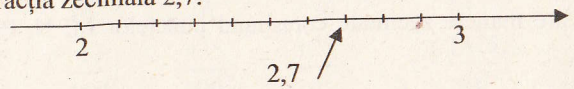
b) 31,25 > 31,2 deoarece 25 > 20;

c) 0,02 > 0,017945 deoarece 20 000 > 17 945.

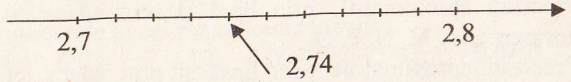
- Comparând orice două fracții zecimale a și b avem posibile următoarele ***relații de ordonare***: a < b, a = b sau a > b.
- Pentru a reprezenta pe axa numerelor o fracție zecimală se procedează astfel:

- unitatea de măsură se împarte în 10 segmente de lungimi egale, lungimea unui segment fiind ***o zecime***;
- segmentul de lungime ***o zecime*** se împarte în zece segmente de lungimi egale, lungimea unui segment fiind ***o sutime*** etc.

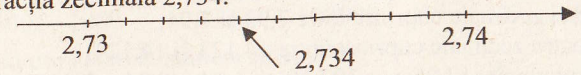
Exemplu: Pe axa numerelor avem reprezentate numerele 2 și 3. Să se reprezinte fracția zecimală 2,7.



Pe axa numerelor avem reprezentate fracțiile zecimale 2,7 și 2,8. Să se reprezinte fracția zecimală 2,74.



Pe axa numerelor avem reprezentate fracțiile zecimale 2,73 și 2,74. Să se reprezinte fracția zecimală 2,734.



Exerciții

❒1. Comparați numerele:

a) 0,22 cu 0,222; b) 2,17 cu 2,71; c) 0,999 cu 1;

d) 999,999 cu 1000; e) 4,157 cu 4,175; f) 487,1 cu 487,10.

❒2. Ordonați crescător numerele:

a) 5,18; 2,05; 4,17; 2,03; 6,31; 0,125; 0,1256;

b) 3,27; 3,275; 0,12; 1,24; 5,123; 5,13.

❒3. Determinați două numere zecimale cuprinse între 2,45 și 2,46.

❒4. Ordonați descrescător numerele:

a) 0,7; 1,12; 25,1; 0,707; 4,107; 24,01; 0,4004; 5,7001;

b) 23,17; 1,23; 12,35; 0,124; 17,23; 1,235; 0,1204.

❒5. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) 17,15 < 71,15; b) 0,107 > 0,17; c) 2,7005 > 2,71;

d) 4,21 < 4,3; e) 124,3 < 124,03; f) 0,143 < 0,134.

❒6. Completați spațiile libere cu unul din semnele „<"; „="; „>".

a) 4,7 ..... 4,70; 4,30 ..... 4,03; 5,21 ..... 5,11;

b) 0,710 ..... 7,10; 3,80 ..... 3,802; 43,125 ..... 4,3125;

c) 0,02 ..... 0,020; 0,001 ..... 0,01; 7,7 ..... 7,77;

d) $\frac{2}{10}$ ..... 0,2; $\frac{30}{100}$ ..... 0,3; $\frac{10}{100}$ ..... 1.

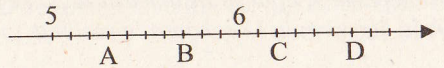
❒7. Reprezentați pe axa numerelor:

a) 0,3; 0,7; 1,2; 1,5; 1,6;

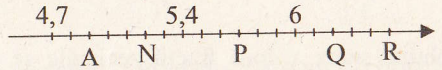
b) 7,1; 7,3; 7,7; 8; 8,5;

c) 29,9; 30,1; 30,4; 30,5; 30,7.

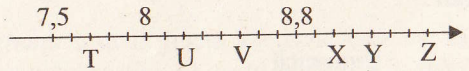
❒8. Precizați coordonatele punctelor:

a) 

;

b) 

;

c) 

.

❒9. Scrieți patru numere zecimale

a) mai mari decât 41,37; b) mai mici decât 0,012;

c) mai mari decât 4, 6 cu partea întreagă mai mică decât 5;

d) mai mari decât 0,5, dar mai mici decât 0,9;

e) cuprinse între 7 și 8; f) cuprinse între 15, 52 și 15,6;

g) cuprinse între 14,136 și 14,137;

h) cuprinse între 1,121 și 1,13.

❒10. Fie numerele zecimale 7,4 și 7,5.

a) Reprezentați aceste numere pe axa numerelor.

b) Scrieți trei numere zecimale cuprinse între acestea.

c) Scrieți trei numere cu patru zecimale cuprinse între acestea.

❒11. Încadrați numerele 0,12; 43,61; 2,05; 71,108; 105,37 între:

a) două numere naturale consecutive;

b) două numere zecimale având o singură zecimală și aceeași parte întreagă cu numărul considerat;

c) două numere zecimale având două cifre la partea zecimală și partea întreagă reprezentată de numere consecutive.

❒12. Folosind cifrele 2,3 și 7 o singură dată scrieți toate numerele zecimale cu partea întreagă 7. Ordonați crescător aceste numere.
❒13. Folosind cifrele 1, 0, 5 o singură dată scrieți toate numerele zecimale cu partea întreagă 0. Ordonați descrescător aceste numere.
❒14. Alexandra a cumpărat 1,125 kg ardei și 1,105 kg vinete. Care din cele două cantități este mai mare?
❒15. Costin a cumpărat 24,57 m de stofă și 24,507 m de pânză. Care bucată este mai mică?

10. Adunarea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule

Suma a două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule se obține astfel: *se așază fracțiile una sub cealaltă astfel încât partea întreagă să fie sub partea întreagă, virgula sub virgulă, zecimile sub zecimi, sutimile sub sutimi și așa mai departe și apoi se însumează după regulile de la adunarea numerelor naturale, iar virgula se coboară la rezultat.*

Exemplu:
$$\begin{array}{r} 367{,}21 + \\ 17{,}14 \\ \hline 384{,}35 \end{array}$$

Operația prin care se obține suma a două fracții zecimale se numește ***adunarea fracțiilor zecimale***.

Exerciții

❒1. Calculați:
a) 24,01 + 0,001; b) 10,7 + 0,12 + 128,004;
c) 2,02 + 0,202 + 0,0202; d) 1 + 2,5 + 0,17 + 11,003 + 101,1;
e) 1 + 171,11 + 4,786 + 111,01; f) 1911 + 4,75 + 0,123 + 12,35.

❒2. Să se efectueze:
a) 7,5 + 4,22; b) 8,56 + 41,18; c) 4 + 5,7; d) 7,6 + 320;
e) 3,53 + 123; f) 4,52 + 7,215; g) 156,72 + 461,5;
h) 0,123 + 1,23 + 12,3; i) 425 + 4,25 + 42,5; j) 0,123 + 12,3 + 1,023.

❒3. Efectuați:
a) 1,41 + 3,44; b) 3,07 + 11,03; c) 3,7 + 4,85; d) 4,721 + 0,869;
e) 42,107 + 17,209; f) 89,515 + 11,065; g) 3,43 + 7,318 + 10,01;
h) 241,4 + 316,131 + 0,01; i) 1,5 + 5,9 + 3,4 + 7,1.

❒4. Să se calculeze:
a) 54 + 32,71 + 43,38 + 21,273 + 91,107 + 0,117 + 17,01 + 45,103;
b) 2,3 + 2,03 + 2,003 + 9,996 + 8,778 + 143,5 + 1,435 + 0,1435;
c) 17 + 134,514 + 4,1 + 171,656 + 3204,308 + 4,917 + 29,70 + 0,01.

❒5. Determinați aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât o sutime pentru următoarele sume:
a) 52,102 + 27,205 + 18,310 + 36,278;
b) 10,134 + 92,001 + 71,12 + 34,508 + 43;
c) 6,4 + 8,2 + 0,369 + 2,072 + 11,0322 + 7,281.

❒6. Determinați rotunjirile până la cea mai apropiată sutime pentru sumele:
a) 12 380 + 20 347,45 + 0,7 + 0,0135 + 0,023;
b) 456,81 + 172,54 + 131 + 537,07 + 7,03;
c) 93,34 + 121,565 + 100 + 2,734 + 7,154.

❒7. Determinați cifrele necunoscute din fiecare egalitate:
a) $\overline{x,y} + \overline{y,x} = 5{,}5$; b) $\overline{x,0y} + \overline{0,xy} = 2{,}26$;
c) $\overline{x,x} + \overline{xx,x} = 36{,}6$; d) $\overline{x,y} + \overline{1x,y} = 16{,}6$.

❒8. Determinați numărul cu 42,75 mai mare decât:
a) 54,57; b) 301,01; c) 1002,003; d) 0,25;
e) 1,29; f) $\frac{11}{10^0}$; g) $\frac{3}{10^3}$; h) $\frac{1475}{10^2}$.

11. Scăderea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule

Diferența a două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule se obține astfel: *se așază fracțiile una sub cealaltă astfel încât partea întreagă să fie sub partea întreagă, virgula sub virgulă, zecimile sub zecimi, sutimile sub sutimi și așa mai departe și apoi se face diferența după regulile de la scăderea numerelor naturale, iar virgula se coboară la rezultat.*

Exemplu:
$$\begin{array}{r} 27{,}350 - \\ 1{,}143 \\ \hline 26{,}207 \end{array}$$

Operația prin care se obține diferența a două fracții zecimale se numește ***scăderea fracțiilor zecimale***.

Exerciții

❒1. Calculați:
a) 24,01 – 0,001; b) 10,7 – 0,12; c) 128 – 12,8;
d) 2,02 – 0,202; e) 11,003 – 1,103; f) 171,11 – 1,71;
g) 7,5 – 4,22; h) 58,56 – 41,18; i) 5 – 4,7.

❒2. Să se efectueze:
a) 312 – 7,6; b) 35,7 – 12,30; c) 7,215 – 4,52;
d) 156,72 – 46,5; e) 12,3 – 1,23; f) 425 – 42,5;
g) 1,73 – 0,173; h) 11,03 – 3,07; i) 4,85 – 3,7.

3. Efectuați:

a) 4,721 – 0,869; b) 42,107 – 17,209; c) 89,515 – 11,065;
d) 10,01 – 7,318; e) 316,131 – 0,01; f) 5,9 – 3,4;
g) 54 – 32,71; h) 21,273 – 11,107; i) 29,7 – 4,917.

4. Determinați aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât o sutime pentru următoarele diferențe:

a) 52,102 – 27,205; b) 36,278 – 18,310; c) 10,134 – 2,01;
d) 43 – 34,508; e) 8,2 – 0,369; f) 11,0322 – 7,281.

5. Determinați rotunjirile până la cea mai apropiată sutime pentru diferențele:

a) 12 380 – 2037,45; b) 0,023 – 0,0135; c) 456,81 – 172,54;
d) 131 – 7,03; e) 121,565 – 93,34; f) 7,154 – 2,734.

6. Efectuați:

a) 97,328 – 54,23; b) 811,394 – 39,05; c) 757,28 – 34,83;
d) 954,502 – 422,681; e) 218,4 – 193,375; f) 708,019 – 640,271;
g) 607,43 – 405,017; h) 456,57 – 117; i) 197,9 – 43;
j) 350,58 – 237; k) 378 – 143,005; l) 386 – 104,37.

7. Determinați numărul cu 17,54 mai mic decât:

a) 47,57; b) 201,01; c) 2001,003; d) 20,15;
e) 22,19; f) $\frac{171}{10^0}$; g) $\frac{27\,015}{10^3}$; h) $\frac{1787}{10^2}$.

8. Calculați cu cât este:

a) 7 mai mare decât o zecime; b) 7 mai mare decât o sutime;
c) o zecime mai mare decât o miime;
d) o sutime mai mare decât o zecime de miime;
e) o sutime de miime mai mică decât o miime;
f) o zecime de miime mai mică decât o miime.

9. Efectuați:

a) 103,56 + 178,87 – 47; b) 11 473 – 2136,81 – 263,15;
c) 4012, 92 + 314,06 – 237; d) 407 – 37,09 – 7,26;
e) 403,83 + 187,74 – 160; f) 9088 – 1043,002 – 65,17.

10. Să se calculeze:

a) 1024,707 + (1043,24 – 347,001) + 101,031;
b) (102 380 – 2007,35) – (0,03 – 0,001);
c) 59,26 + 143,87 – (43,7 – 17,86);
d) 4,705 + 1,043 – (2,01 – 1,073) + (3,01 – 1,024);
e) 19,34 + 121,307 – (10 – 7,023) – (143 – 17,406);
f) 1425 – (456,17 – 127,42) – (345 – 123,72).

11. Aproximați prin adaos, apoi prin lipsă cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{100}$ rezultatul operațiilor:

a) 473,185 – 47,31 + 123,705; b) 1347,364 – 337,12 – 27,004;
c) 21,26 + 0,33 + 1,447; d) 0,0127 + 23,57 + 2537 + 2,572.

12. Care număr este mai mare și cu cât:

a) suma numerelor 437,35 și 1028,17 sau diferența numerelor 907,14 și 718,007;

b) diferența numerelor 123,17 și 12,317 sau suma numerelor 24,107 și 0,005.

12. Înmulțirea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule (înmulțirea cu 10^n, $n \in N$; înmulțirea cu un număr natural; înmulțirea a două numere scrise cu virgulă).

1. Înmulțirea unui număr zecimal cu o putere a lui 10

Înmulțind numerele 187,53 și 10 obținem:

$$187{,}53 \cdot 10 = \frac{18\,753}{100} \cdot 10 = 1875{,}3$$

și se constată că, prin înmulțirea unui număr zecimal cu 10, ***virgula se mută la dreapta peste o cifră.***

Analog 187,53 · 100 = 18 753 și 187,53 · 1000 = 187 530, adică:

„La înmulțirea unui număr zecimal cu o putere a lui 10 se mută virgula spre dreapta peste atâtea cifre cât este exponentul lui 10."

Exemple: 1,617 · 10 = 16,17; 1,617 · 100 = 161,7; 1,617 · 1000 = 1617.

2. Înmulțirea a două numere zecimale

Înmulțind numerele 18,75 și 1,324 obținem:

$$18{,}75 \cdot 1{,}324 = \frac{1875}{100} \cdot \frac{1324}{1000} = \frac{2\,482\,500}{100\,000} = 24{,}825$$

și se constată că:

„Două numere zecimale se înmulțesc astfel: se efectuează înmulțirea numerelor neținând seama de virgulă, iar la rezultat despărțim prin virgulă, de la dreapta la stânga, atâtea cifre zecimale câte au cele două numere zecimale împreună."

Exemple:

123,4 · 22,5	11,124 · 3,012	47,52 · 0,431
617 0	22 248	4 752
2468	111 24	14 256
2468	33 372	190 08
2776,50	33,505488	20,48112

Exerciții

1. Calculați:

a) $0{,}172 \cdot 10$; $45{,}5 \cdot 10$; $1{,}23 \cdot 10$; $125{,}123 \cdot 10$;

b) $0{,}172 \cdot 100$; $45{,}5 \cdot 100$; $1{,}23 \cdot 100$; $125{,}123 \cdot 100$;

c) $0{,}172 \cdot 1000$; $45{,}5 \cdot 1000$; $1{,}23 \cdot 1000$; $125{,}123 \cdot 1000$.

2. Efectuați:

a) $1{,}5 \cdot 2{,}3$; b) $1{,}05 \cdot 1{,}3$; c) $3{,}004 \cdot 1{,}65$;

d) $3{,}17 \cdot 5$; e) $4{,}8 \cdot 0{,}1$; f) $101 \cdot 0{,}01$;

g) $201 \cdot 1{,}005$; h) $0{,}3 \cdot 0{,}001$ i) $4{,}3 \cdot 0{,}4$.

3. Determinați aproximările prin lipsă sau adaos cu o eroare mai mică decât o sutime pentru produsele:

a) $4{,}725 \cdot 3$; b) $17{,}25 \cdot 25$; c) $0{,}047 \cdot 123$;

d) $2{,}001 \cdot 17$; e) $8{,}24 \cdot 10$; f) $25{,}7 \cdot 100$;

g) $10^3 \cdot 14{,}17$; h) $8{,}34 \cdot 12{,}5$; i) $10{,}03 \cdot 7{,}01$;

j) $20 \cdot \frac{1}{10^3}$; k) $12{,}7 \cdot \frac{7}{10^2}$; l) $7{,}5 \cdot 12{,}57$.

4. Determinați rotunjirile până la cea mai apropiată zecime pentru produsele:

a) $7{,}3 \cdot 9{,}17 \cdot 15$; b) $0{,}017 \cdot 7{,}3 \cdot 8$; c) $17{,}03 \cdot 11{,}04 \cdot 11$;

d) $61{,}7 \cdot 8{,}03 \cdot 2$; e) $3{,}873 \cdot 0{,}07 \cdot 100$; f) $50 \cdot 7{,}03 \cdot 0{,}1$;

g) $7528 \cdot 0{,}01$; h) $473{,}15 \cdot 0{,}1$; i) $0{,}0723 \cdot 0{,}001 \cdot 10^3$.

5. Calculați numărul de 10, 100, 1000 de ori mai mare decât:

a) 4,001; b) 21,34; c) 473,412; d) 23,2651; e) 0,0001;

f) 12,0103; g) 701,3450; h) 17,0354; i) 0,1; j) 12.

6. Calculați numărul de 0,1, 0,01, 0, 001 de ori mai mare decât:

a) 2,004; b) 17,34; c) 475; d) 12,5; e) 0,1;

f) 124,3; g) 1; h) 20; i) 300; j) 5000.

7. Măriți de 25,4 ori numerele:

a) 14,27; b) 12; c) 100; d) 1000; e) 1,25;

f) 154,5; g) 37,45; h) 15; i) 125; j) 325.

8. Efectuați înmulțirile ce urmează și aproximați rezultatele cu o eroare de o zecime prin lipsă:

a) $12{,}5 \cdot 4{,}75$; b) $1{,}247 \cdot 13{,}71$; c) $1{,}543 \cdot 12{,}37$; d) $125 \cdot 12{,}7$;

e) $0{,}12 \cdot 5{,}76$; f) $0{,}237 \cdot 1{,}242$; g) $0{,}15 \cdot 324$; h) $1{,}234 \cdot 725$.

9. Efectuați:

a) $0{,}8 \cdot 15 \cdot 35$; b) $9{,}5 \cdot 40 \cdot 0{,}4$; c) $10{,}2 \cdot 3{,}5 \cdot 1025$;

d) $34{,}2 \cdot 27{,}5 \cdot 11$; e) $2{,}005 \cdot 0{,}4 \cdot 1000$; f) $31{,}45 \cdot 1{,}242 \cdot 100$.

10. Calculați numărul de 4,5 ori mai mare decât:

a) 10; b) 120; c) 34; d) 122; e) 15 400; f) 900;

g) 2,6; h) 12,46; i) 80,4; j) 15,4; k) 324,4; l) 1000.

13. Împărțirea numerelor naturale; împărțirea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule la 10^n, $n \in \mathbb{N}$, la un număr natural, la un număr zecimal.

1. Împărțirea unui număr zecimal cu o putere a lui 10

Calculând 23,75 : 10 avem:

$$23{,}75 : 10 = \frac{2375}{100} : 10 = \frac{2375}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2375}{1000} = 2{,}375,$$ adică *pentru a împărți un număr zecimal la 10 se mută virgula la stânga peste o cifră.*

Analog *pentru a împărți un număr zecimal la o putere a lui 10 se mută virgula spre stânga peste un număr de cifre egal cu exponentul lui 10.*

Exemple:

a) 7,21 : 10 = 0,721; 21,3 : 10 = 2,13; 0,127 : 10 = 0,0127;

b) 7,21 : 100 = 0,0721; 21,3 : 100 = 0,213; 0,127 : 100 = 0,00127;

c) 7,21 : 1000 = 0,00721; 21,3 : 1000 = 0,0213; 0,127 : 1000 = 0,000127.

2. Împărțirea unui număr zecimal la un număr zecimal

Împărțirea numerelor zecimale se efectuează în același mod ca și împărțirea numerelor naturale, după ce înmulțim deîmpărțitul și împărțitorul cu acea putere a lui 10 care transformă împărțitorul în număr natural iar virgula se formează la cât atunci când se ajunge la ea la deîmpărțit.

Exemple:

a) 1,25 : 0,5 = 12,5 : 5 = 2,5; b) 0,175 : 2, 5 = 1, 75 : 25 = 0,07.

Observații:

1) Nu toate împărțirile se pot efectua exact.

0,48 : 3,7 = 4,8 : 37 = 0,1297297 .....

$$\begin{array}{r|l} 4{,}8 & 37 \\ \hline 0 & 0{,}1297 \\ \hline 48 & \\ 37 & \\ \hline 110 & \\ 74 & \\ \hline 360 & \\ 333 & \\ \hline =270 & \\ 259 & \\ \hline =11 & \end{array}$$

Proba $0,48 = 3,7 \cdot 0,1297 + 0,00011$

Restul obținut se stabilește astfel: numărul zerourilor adăugate la deîmpărțit adunat cu exponentul puterii lui 10 cu care s-au înmulțit deîmpărțitul și împărțitorul dau numărul de zecimale ale restului.

Exerciții

❒**1.** Să se efectueze:
a) 15,4 : 10; 7,125 : 10; 123 : 10;
b) 15,4 : 100; 7,125 : 10^2; 123 : 100;
c) 15,4 : 10^3; 7,125 : 1000; 123 : 1000.

❒**2.** Calculați cu două zecimale exacte și faceți proba:
a) 137 : 5; b) 147 : 12; c) 4125 : 6;
d) 715 : 7; e) 431 : 24; f) 2157 : 132.

❒**3.** Să se efectueze cu două zecimale exacte și faceți proba:
a) 210,52 : 72; b) 51,87 : 63; c) 7651 : 5;
d) 0,43 : 43; e) 857,16 : 24; f) 481, 14 : 11.

❒**4.** Efectuați următoarele împărțiri cu trei zecimale exacte și faceți proba:
a) 45,7 : 1,29; b) 7517,3 : 0,97; c) 1700,34 : 7,1;
d) 435,42 : 31; e) 1549 : 25,3; f) 739,37 : 4,12.

❒**5.** Efectuați împărțirile ce urmează cu 2 zecimale și faceți proba:
a) 0,127 : 3,4; b) 2,97 : 0,12; c) 19,37 : 0,03;
d) 11,46 : 2,8; e) 43,17 : 34,1; f) 1,17 : 1,2.

❒**6.** Calculați cu aproximație de o sutime, prin adaos:
a) 47 : 7; b) 67 : 37; c) 41,2 : 8,3;
d) 1,7 : 0,89; e) 0,481 : 0,35; f) 21,37 : 15,3.

❒**7.** Împărțiți 35,684 la 1,97.
a) Dați un ordin de mărime al câtului.
b) Efectuați împărțirea cu aproximație de o miime, prin lipsă.
c) Aproximați prin lipsă cu o unitate câtul și determinați restul.
d) Aproximați prin lipsă cu 0,1 câtul și determinați restul.
e) Aproximați prin lipsă cu 0,01 câtul și determinați restul.
f) Aproximați prin lipsă cu 0,001 câtul și determinați restul.
g) Verificați rezultatele făcând proba pentru fiecare caz în parte.

❒**8.** Calculați numărul de 0;1; 0;01; 0;001 de ori mai mic decât:
a) 7,004; b) 25,54; c) 57,542; d) 31 265; e) 0,1;
f) 12 000; g) 700,3; h) 1703,5; i) 0,1; j) 425.

❒**9.** Aproximați prin lipsă, apoi prin adaos, cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{10^2}$ rezultatele operațiilor:
a) 17,31 : 1,5 · 1,02; b) 1,4 · 0,13 : 3,6; c) 4,92 · 1,9 : 0,311;
d) 5 · 12,47 : 0,8; e) 14 · 2,415 : 2,1; f) 6,222 : 0,3 · 2,8.

❒**10.** a) Știind că 100 lăzi de pere cântăresc 2143 kg. Câte kg vor cântări 32 lăzi de pere?

b) O fabrică prelucrează în 10 zile 170,1 tone de materie primă. Câte tone de materie primă va prelucra în 7 zile?

14.Ridicarea la putere cu exponent număr natural a unui număr care are un număr finit de zecimale nenule

Calculând $1,7^3 = 1,7 \cdot 1,7 \cdot 1,7 = 2,89 \cdot 1,7 = 4,913$, se observă că ***numărul de zecimale al unei puteri a unui număr zecimal este egal cu produsul dintre numărul de zecimale ale bazei și exponentul puterii.***

Exemple:

$0,01^3$ are **2 · 3 = 6 zecimale** adică $0,01^3 = 0,000001$;

$0,001^2$ are **3 · 2 = 6 zecimale** adică $0,001^2 = 0,000001$.

Observații:

1) ***Dacă x este o fracție zecimală finită atunci*** $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\text{n factori}}$, ***n ∈ N și*** $x^0 = 1, x \neq 0, x^1 = x, 0^0$ ***nu există.***

2) ***Dacă x și y sunt două fracții zecimale finite și m și n numere naturale atunci:*** $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$; $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$;
$x^m : x^n = x^{m-n}$; $x^m : y^m = (x : y)^m$.
$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$;

Exerciții

❒**1.** Efectuați:
a) $0,1^2$; $0,5^2$; $0,6^2$; $1,2^2$; $3,4^2$; $7,5^2$; $3,1^2$;
b) $0,1^3$; $0,5^3$; $0,6^3$; $1,2^3$; $3,4^3$; $7,5^3$; $3,1^3$.

❒**2.** Cum este corect:
a) $(0,2)^3 \cdot (0,2)^5 = (0,2)^{3+5}$ sau $(0,2)^3 \cdot (0,2)^5 = (0,2)^{3 \cdot 5}$;
b) $(0,3)^6 = (0,3)^2 \cdot (0,3)^3$ sau $(0,3)^6 = (0,3)^3 \cdot (0,3)^3$;
c) $(0,5)^3 \cdot (0,5)^2 \cdot 0,5 = (0,5)^5$ sau $(0,5)^3 \cdot (0,5)^2 \cdot 0,5 = (0,5)^6$;
d) $(0,1)^2 + (0,1)^3 = (0,1)^5$ sau $(0,1)^2 + (0,1)^3 = 0,01 + 0,001 = 0,011$.

3. Efectuați operațiile scriind rezultatul sub formă de putere:

a) $(0,1)^3 \cdot (0,1)^5$; b) $(0,2)^2 \cdot (0,2)^3 \cdot 0,2$; c) $(0,3) \cdot (0,3)^4 \cdot (0,3)^2$;
d) $(0,4) \cdot (0,4)^2 \cdot (0,4)^5$; e) $(0,5)^0 \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)$; f) $(0,1) \cdot (0,1)^0 \cdot (0,1)^5$.

4. Înlocuiți „…” astfel încât egalitățile să fie corecte:

a) $(0,6)^5 = (0,6)^4 \cdot \cdots = (0,6)^2 \cdot \cdots = (0,6)^5 \cdot \cdots$;
b) $(0,2)^4 = (0,2)^2 \cdot \cdots = (0,2)^4 \cdot \cdots = (0,2)^3 \cdot \cdots$;
c) $(0,9)^3 = (0,9)^0 \cdot \cdots = (0,9)^2 \cdot \cdots = (0,9)^3 \cdot \cdots$;
d) $(0,7)^5 = \cdots \cdot \cdots = \cdots \cdot \cdots = \cdots \cdot \cdots$;
e) $(0,4)^{30} = (0,4)^2 \cdot \cdots \cdot (0,4)^3 = (0,4)^5 \cdot \cdots \cdot \cdots$

5. Cum este corect?

a) $(0,5)^6 : (0,5)^2 = (0,5)^{6-2}$ sau $(0,5)^6 : (0,5)^2 = (0,5)^{6:2}$.
b) $(0,4)^8 : (0,4)^2 = (0,4)^6$ sau $(0,4)^8 : (0,4)^2 = (0,4)^4$.

6. Calculați:

a) $(0,3)^4 : (0,3)^2$; b) $(1,1)^{24} : (1,1)^{22}$; c) $(1,3)^5 : (1,3)^5$;
d) $(0,7)^4 : (0,7)^3$; e) $(1,25)^{125} : (1,25)^{124}$; f) $[(0,1)^9 : (0,1)^2] : (0,1)^7$.

7. Efectuați operațiile scriind rezultatele sub formă de puteri:

a) $(0,3)^8 : (0,3)^5 : (0,3)^2$; b) $(0,4)^{11} : (0,4)^{11} : (0,4)^0$;
c) $(0,7)^{20} : (0,7)^7 : (0,7)^{11}$; d) $(1,07)^9 : (1,07)^3 : (1,07)^6$;
e) $(2,3)^6 : (2,3)^0 : (2,3)^4$; f) $(2,15)^x : (2,15)^2 : (2,15)^3$, $x \geq 5$.

8. Completați observând exemplul a):

a) $(0,7)^4 = (0,7)^9 : (0,7)^5$; b) $(0,9)^4 = (0,9)^6 : \cdots$;
c) $(0,3)^8 = \cdots : (0,3)^5$; d) $(0,4)^5 = (0,4)^5 : \cdots$;
e) $(1,7)^4 = (1,7)^5 : \cdots$; f) $(1,1)^5 = \cdots : (1,1)^2$;
g) $(0,5)^7 = \cdots : \cdots$; h) $(1,2)^0 = \cdots : \cdots$.

9. Cum este corect?

a) $[(0,3)^2]^3 = (0,3)^{2 \cdot 3}$ sau $[(0,3)^2]^3 = (0,3)^{2+3}$;
b) $[(0,2)^5]^2 = (0,5)^7$ sau $[(0,2)^5]^2 = (0,5)^{10}$;
c) $[(0,7)^7]^7 = (0,7)^{49}$ sau $[(0,7)^7]^7 = (0,7)^{14}$.

10. Efectuați operațiile scriind rezultatele sub formă de putere:

a) $[(0,5)^3]^{11}$ b) $[(1,7)^6]^9$; c) $[(1,2)^5]^2$; d) $[(0,8)^8]^3$;
e) $\{[(0,2)^3]^4\}^5$; f) $\{[(0,7)^3]^{10}\}^5$; g) $\{[(1,06)^2]^{20}\}^{40}$; h) $\{[(0,1)^1]^2\}^3$;
i) $\{[(0,5)^1]^7\}^0$; j) $\{[(2,5)^0]^1\}^7$; k) $\{[(0,4)^3]^{12}\}^0$; l) $[(2,3)^5]^4$.

11. Completați urmărind modelul a):

a) $(0,3)^{30} = [(0,3)^5]^6 = [(0,3)^6]^5$; b) $(0,2)^6 = \cdots\cdots = \cdots\cdots$;
c) $(0,5)^4 = \cdots\cdots = \cdots\cdots$; d) $(0,7)^{45} = \cdots\cdots = \cdots\cdots$;
e) $(1,7)^{15} = \cdots\cdots = \cdots\cdots$; f) $(2,3)^{17} = \cdots\cdots = \cdots\cdots$.

12. Aplicând regula $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$ unde x și y sunt fracții zecimale finite și m, n numere naturale calculați:

a) $[(0,2) \cdot (0,3)]^3$; b) $[(0,3) \cdot (0,5)]^2$; c) $[(0,5) \cdot (0,2)]^3$;

d) $[(0,2) \cdot (0,7)]^0$; e) $[(1,3) \cdot (1,1) \cdot (1,7)]^5$; f) $[(0,8) \cdot (1,1) \cdot (0,2)]^3$;

13. Completați după modelul a):

a) $(0,2)^7 \cdot (0,3)^7 = [(0,2) \cdot (0,3)]^7 = (0,06)^7$;
b) $(0,5)^3 \cdot (0,7)^3 = \cdots\cdots = \cdots\cdots$;
c) $(0,1)^4 \cdot (0,2)^4 = \cdots\cdots = \cdots\cdots$;
d) $(0,3)^4 \cdot (0,5)^4 = \cdots\cdots = \cdots\cdots$;
e) $(3,5)^0 \cdot (0,1)^0 = \cdots\cdots = \cdots\cdots$;
f) $(0,2)^3 \cdot (0,3)^3 \cdot (0,5)^3 = \cdots\cdots = \cdots\cdots$;

14. Aplicând regula $x^m : y^m = (x : y)^m$ unde x și y sunt fracții zecimale finite și m, n numere naturale calculați:

a) $(1,7)^2 : (0,17)^2$; b) $(1,21)^3 : (1,1)^3$; c) $(1,44)^4 : (1,2)^4$;
d) $(3,24)^3 : (1,8)^3$; e) $(0,25)^4 : (0,5)^4$; f) $(1,331)^2 : (1,21)^2$.

15. Periodicitate; aproximări zecimale*

Dacă numitorul unei fracții ordinare ireductibile conține și alți factori decât puteri ale lui 2 și 5, atunci împărțirea numărătorului la numitor este nesfârșită.

Exemple: 1)

5	7
50	0,7142857
49	
10	
7	
30	
28	
= 20	
14	
= 60	
56	
= 40	
35	
= 50	
49	
= 1	

2)

37	15
30	2,466
= 70	
60	
100	
90	
= 100	
90	
= 10	

Fracția zecimală obținută în exemplul 1) este o ***fracție zecimală periodică simplă*** cu perioada 714285 și scriem $\frac{5}{7} = 0,(714285)$.

Fracția ordinară ireductibilă $\frac{x}{y}$ ***al cărei numitor are numai factori primi diferiți de 2 și 5 se transformă într-o fracție zecimală periodică simplă, perioada având cel mult y – 1 cifre.***

Fracția zecimală obținută în exemplul 2) este o ***fracție zecimală periodică mixtă*** cu ***perioada*** 6 și ***partea neperiodică*** 4 și scriem $\frac{37}{15} = 2{,}4(6)$.

Fracția ordinară ireductibilă $\frac{x}{y}$ ***al cărei numitor are, pe lângă alți factori și cel puțin unul din factorii 2 și 5, se transformă într-o fracție zecimală periodică mixtă.***

Fracțiile zecimale periodice simple sau mixte se aproximează cu fracții zecimale finite.

Exemple:

1) $0{,}(3) \approx 0{,}3$ sau $0{,}(3) \approx 0{,}33$ sau $0{,}(3) \approx 0{,}333$;
2) $0{,}(6) \approx 0{,}7$ sau $0{,}(6) \approx 0{,}67$ sau $0{,}(6) \approx 0{,}667$;
3) $2{,}(46) \approx 2{,}5$ sau $2{,}(46) \approx 2{,}46$ sau $2{,}(46) \approx 2{,}464$.

Transformarea fracțiilor zecimale periodice în fracții ordinare

a) ***O fracție zecimală periodică simplă se transformă într-o fracție ordinară al cărei numărător se obține din numărul zecimal prin omiterea virgulei iar numitorul este format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.***

Exemple:

1) $0{,}(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0{,}(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$; $0{,}(36) = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$;

2) $2{,}(3) = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$; $5{,}(12) = 5\frac{12}{99} = 5\frac{4}{33}$; $7{,}(36) = 7\frac{36}{99} = 7\frac{4}{11}$.

b) ***O fracție zecimală periodică mixtă cu partea întreagă nulă se transformă într-o fracție ordinară al cărei numărător este diferența dintre numărul natural format din partea neperiodică urmată de perioadă și numărul natural format din partea neperiodică, iar numitorul este format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada și atâtea cifre de zero câte cifre are partea neperiodică.***

Dacă fracția periodică mixtă are partea întreagă nenulă, aceasta se adună cu fracția ordinară obținută după regula anterioară.

Exemple:

1) $0{,}3(15) = \frac{315-3}{990} = \frac{312^{(3}}{990} = \frac{104^{(2}}{330} = \frac{52}{165}$;

2) $7{,}3(15) = 7\frac{315-3}{990} = 7\frac{312^{(3}}{990} = 7\frac{104^{(2}}{330} = 7\frac{52}{165}$.

Exerciții

❒**1.** Să se transforme fracțiile ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{17}{10}$; b) $\frac{1034}{100}$; c) $\frac{17}{1000}$; d) $\frac{100\,009}{10\,000}$; e) $\frac{54}{10\,000}$;

f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{34}{4}$; h) $\frac{125}{40}$; i) $\frac{15}{16}$; j) $\frac{13}{8}$.

❒**2.** Transformați fracțiile ordinare în fracții zecimale periodice simple:

a) $\frac{17}{9}$; b) $\frac{56}{27}$; c) $\frac{83}{3}$; d) $\frac{100}{27}$; e) $\frac{44}{9}$;

f) $\frac{50}{9}$; g) $\frac{131}{3}$; h) $\frac{152}{27}$; i) $\frac{84}{33}$; j) $\frac{1751}{33}$.

❒**3.** Să se transforme fracțiile ordinare în fracții zecimale periodice mixte:

a) $\frac{17}{6}$; b) $\frac{19}{12}$; c) $\frac{43}{18}$; d) $\frac{263}{15}$; e) $\frac{7}{12}$;

f) $\frac{231}{24}$; g) $\frac{35}{18}$; h) $\frac{137}{72}$; i) $\frac{1005}{36}$; j) $\frac{107}{6}$.

❒**4.** Să se transforme fracțiile zecimale în fracții ordinare:

a) 13,2; b) 2,49; c) 1,75; d) 11,003; e) 3,0004.

❒**5.** Să se efectueze transformările cerute în tabelul următor:

$1{,}(3) = 1\frac{3^{(3}}{9} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$2{,}(12) = 2\frac{12}{99} = \frac{210}{99}$	$0{,}(231) = \frac{231^{(3}}{999} = \frac{77}{333}$
$5{,}(5) =$	$0{,}(23) =$	$12{,}(021) =$
$7{,}(4) =$	$0{,}(40) =$	$0{,}(235) =$

❒**6.** Să se efectueze transformările cerute în tabelul următor:

$2{,}1(3) = 2\frac{13-1}{90} = 2\frac{12^{(6}}{90} = 2\frac{2}{15} = \frac{32}{15}$	$3{,}2(13) = 3\frac{213-2}{990} = 3\frac{211}{990}$	$2{,}3(415) = 2\frac{3415-3}{9990} = 2\frac{3412^{(2}}{9990} = 2\frac{1706}{4995}$
$3{,}2(4) =$	$4{,}9(05) =$	$0{,}1(235) =$
$5{,}3(5) =$	$3{,}0(24) =$	$3{,}2(415) =$
$2{,}2(8) =$	$1{,}2(16) =$	$2{,}0(137) =$

❒7. Scrieți după modelul:

$$432{,}745 = 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}$$

numerele: 415,512; 5347,12; 7007,7007.

❒8. Scrieți sub formă de fracție zecimală:

a) $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 10 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 4 \cdot \frac{1}{10^3}$;

b) $5 \cdot 10^4 + 7 \cdot \frac{1}{10^5}$.

❒9. Fie mulțimea de fracții:

$$A = \left\{\frac{7}{10}, \frac{1}{2}, \frac{17}{9}, \frac{131}{3}, \frac{16}{15}, \frac{263}{15}, \frac{7}{12}, \frac{84}{33}\right\}.$$

Fără să le transformați, determinați fracțiile din mulțimea A ce reprezintă:

a) fracții zecimale finite;
b) fracții zecimale periodice simple;
c) fracții zecimale periodice mixte.

❒10. Fie fracția zecimală 0,34 344 3444 34444 344444 ... (după primul trei urmează un 4; după al doilea trei urmează doi de 4 ş. a. m. d.). Este ea o fracție zecimală periodică? Reprezintă ea un număr rațional?

16. Ordinea efectuării operațiilor

În rezolvarea exercițiilor în care apar operații cu numere zecimale, ordinea efectuării operațiilor şi desfacerea parantezelor respectă regulile învățate la numere naturale şi numere fracționare.

Exemple:

1) $2{,}15 \cdot 3{,}5 - 6{,}7 : 2 = 7{,}525 - 3{,}35 = 4{,}175$;
2) $1{,}2 \cdot [0{,}1 + 0{,}2 \cdot (0{,}1 - 0{,}03)] = 1{,}2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}07) =$
$= 1{,}2 \cdot (0{,}1 + 0{,}014) = 1{,}2 \cdot 0{,}114 = 0{,}1368$.

Exerciții

❒1. Să se efectueze:

a) $2{,}45 \cdot 1{,}2 - 0{,}7963$;
b) $2{,}14 + 2{,}14 : 2$;
c) $20{,}7 + 10{,}5 \cdot 20{,}7$;
d) $1 + 7{,}5 : 0{,}8$;
e) $100 \cdot (325 : 3{,}25 + 3{,}25 : 325 + 3{,}25 : 32{,}5)$;
f) $10 \cdot [0{,}57 + (20{,}03 - 7{,}5) : 0{,}1]$;
g) $0{,}1 + 100 \cdot 0{,}002 + 0{,}1 \cdot (2{,}7 - 0{,}7) : 0{,}001$;
h) $0{,}01 \cdot 10 : 0{,}02 + 10 \cdot (127 - 1{,}27) + 2354{,}05$.

❒2. Determinați numărul de 3,5 ori mai mare decât:

a) $1{,}2 \cdot (7{,}1 + 5{,}9)$;
b) $(3{,}27 + 0{,}73) \cdot 0{,}31$;
c) $17{,}2 \cdot (135{,}80 - 72{,}75)$;
d) $(10{,}025 - 4{,}975) \cdot 5{,}2$;
e) $(17{,}5 - 5{,}5) \cdot (3{,}75 - 2{,}95)$;
f) $52 - 25 \cdot (14{,}175 - 12{,}125)$;
g) $10 \cdot 14{,}3 - 100 \cdot 0{,}127$;
h) $(7{,}47 - 4{,}97) \cdot 10 + 12{,}7 \cdot 1{,}2$;
i) $(137{,}5 - 117, 3) \cdot (12{,}7 - 11{,}2)$;
j) $(0{,}71 - 0{,}52) \cdot (14{,}3 + 12{,}5) \cdot 10^2$.

❒3. Efectuați:

a) $1{,}35 : 1{,}5 + 5{,}4 : 1{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot (4{,}4 - 1{,}37)$;
b) $(3{,}5 : 10 + 11{,}37 \cdot 10) - (0{,}057 + 3{,}218 + 3{,}218 \cdot 2{,}5)$;
c) $5{,}2 \cdot (4{,}5 : 0{,}9 + 1{,}25) \cdot 1{,}4 - (2{,}123 + 5{,}873) \cdot 4$;
d) $10 \cdot 3{,}05 - 25 : 10^2 + 4{,}15 \cdot 3{,}7 + 10{,}03 : 0{,}1 - 1{,}5 \cdot 5{,}7$.

❒4. Efectuați:

a) $\left[0{,}5 - 0{,}(3) - 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{8} : 0{,}125\right) + \frac{1}{3}\right] : 0{,}01 + 0{,}5 : \frac{1}{2^2}$;

b) $\left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{36} - \frac{1}{24}\right) : [0{,}(6) - 0{,}5]\right\} : 0{,}1(3) - 1 : \frac{2^3}{3^2}$;

c) $\frac{1}{3} : \left(0{,}6 + 0{,}6 \cdot \frac{1}{3}\right) + 0{,}125 \cdot \left(0{,}25 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(0{,}2 + \frac{1}{3}\right)$;

d) $0{,}625 : \frac{5}{2} + 2{,}(3) \cdot \frac{3}{5} - 0{,}1(6) - 1{,}(6) \cdot \left(3 - \frac{5}{2}\right) + 0{,}5 \cdot 2 - (3{,}2)^0$;

e) $[0{,}(6) + 3{,}(6)] : (0{,}2 + 0{,}3 \cdot 2) - 0{,}4 \cdot \left(\frac{1}{3} + 0{,}25\right) + 3 : (2{,}5 - 1{,}5) - \frac{1}{3}$;

f) $2 + (3 - 2{,}5) \cdot \left(1 + \frac{7}{5}\right) - 0{,}(6) : \frac{2}{3} + \left[0{,}(3) + \frac{5}{3}\right] \cdot \left(\frac{1}{4} + 0{,}4\right) - 1{,}7 \cdot 7 \cdot \left(0{,}2 : \frac{7}{3}\right)$.

❒5. Stabiliți dacă rezultatul următoarelor operații sunt numere naturale:

a) $\left(1\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left[111{,}32 - (3 + 2{,}15)^2\right]^0 \cdot [0{,}8(3)]^3$;

b) $\frac{12}{29} \cdot \left[1{,}5^2 + 0{,}(6) - 1{,}3 : 2\frac{3}{5}\right] + 17^0$;

c) $\left[1{,}(3) + \frac{4}{5}\right]^5 : (0{,}2)^3 - [0{,}(3) + 0{,}35(6) + 3{,}21 : 0{,}11] + 0{,}2$;

d) $[0{,}(5) - 0{,}125(7) : 1{,}2 - 0{,}175]^0 : (0{,}125 - 0{,}025) : 0{,}1$;

e) $[13 : 4{,}(3) + 12{,}2 : 0{,}1] \cdot (0{,}015 - 0{,}001 + 7{,}888 \cdot 0{,}125)$.

❒6. Să se efectueze:

a) $5{,}2+\frac{1}{3}-8\frac{4}{7}\cdot\left(0{,}25+\frac{1}{10}\right)+2{,}06-\frac{3}{50}$;

b) $0{,}12\cdot\frac{1}{4}+0{,}251:\left(2+\frac{1}{125}\right)+\frac{27}{7}\cdot\left[0{,}(3)+\frac{1}{4}\right]\cdot\left(1-\frac{5}{9}\right)$;

c) $\frac{1}{3}\cdot\left(0{,}2+0{,}2:\frac{1}{5}\right)+0{,}125\cdot[0{,}15+0{,}1(6)]:[0{,}1+0{,}(3)]\cdot 5\frac{9}{19}$;

d) $\left\{\left[\frac{3}{4}+0{,}(6)\right]\cdot\frac{12}{17}+0{,}5:\frac{1}{10^2}\right\}:0{,}1(3):8\frac{1}{2}$;

e) $[3\cdot 3^2\cdot 3^{150}+2^{70}:2^{50}+(5^3)^{17}]:[2^{102}:2^{82}+(3^3)^{51}+5^{51}]$;

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left[2{,}212-(1{,}1+0{,}11)^2\right]^0$;

g) $46\frac{4}{5}\cdot[0{,}(3)]^2:[(0{,}01+1{,}03)+(0{,}1+2{,}01\cdot 10-1{,}02:0{,}1)]$

❒7. Efectuați:

a) $\left\{\left[\frac{7}{3}-0{,}(3)\right]^2\cdot 4\right\}:\left(\frac{17}{10}:0{,}012+12{,}7\cdot 0{,}6\right)\cdot 162\frac{5}{6}$;

b) $\frac{111}{300}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{200}\right)+[0{,}(12)+0{,}1(3)]\cdot\frac{274}{41}:17{,}125\cdot\frac{495}{126}$;

c) $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot[0{,}(3)+2{,}(3)]+\left[0{,}1(13):\frac{12}{165}+1\right]\cdot\frac{1}{23}$;

d) $\left\{\left(2+\frac{17}{12}\right):\left(0{,}12+\frac{1}{25}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-0{,}03\right)+\left[\frac{2}{3}-0{,}(3)\right]\right\}\cdot 2^4\cdot 3\cdot 5^2$;

e) $0{,}(5)\cdot\left\{(0{,}01+10{,}2):\left(1+\frac{10{,}5}{10}\right)\cdot 3{,}69\cdot 0{,}5^3\cdot\left[1{,}44-(1+0{,}2)^2\right]^3\right\}$.

❒8. Rotunjiți la două zecimale rezultatele calculelor:

a) $\left(0{,}1+\frac{1}{2}+0{,}01\cdot 10\right):\left[\left(0{,}17+\frac{4}{5}\right)\cdot 10+2{,}7\cdot 2\right]$;

b) $1{,}75+\left(0{,}3+\frac{1}{3}+0{,}15\right)\cdot 10-\frac{1}{2}+0{,}15\cdot\left(0{,}2+\frac{1}{5}+0{,}5+2\right)\cdot 10^2$;

c) $\frac{25}{588}+17{,}25:172{,}5+\left(1\frac{3}{4}+0{,}11\right):\frac{4}{7}-\frac{93}{200}-$

$-0{,}125:\left[\frac{1}{10}\cdot(1{,}32:0{,}3)+2\frac{1}{2}\right]+2{,}125$;

d) $\frac{12}{5}+0{,}3:\left(2+0{,}3\cdot 3\frac{1}{2}\right)\cdot 61-\left[\left(0{,}25+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{12}{7}+0{,}2:\frac{1}{10}\right]\cdot 0{,}1(3)$;

e) $\frac{1}{3}+2{,}(3)+1{,}1(3):0{,}17-3\frac{1}{2}:\frac{7}{2}+\frac{117}{5}+\left[0{,}1+\frac{5}{11}-0{,}(23)\right]:\frac{29}{60}$.

❒9. Calculați $2x + 0{,}15y$ unde:

a) $x = [1{,}2(6) + 3{,}(6) - 3{,}5] : 0{,}4(3)$ și $y = [17 - 4{,}1(13)] \cdot 495$;

b) $x = (2 : 1{,}2 + 1{,}15 : 0{,}2 + 1) \cdot 3$ și $y = 43{,}3 - 14{,}(12) \cdot 3{,}3 + 7$.

❒10. Determinați valoarea expresiei: $E = 2{,}5x + 0{,}0(75)y$ unde

$x = 1{,}1(3) - 0{,}(3024) \cdot 3\frac{103}{336} + 0{,}236(4) : 0{,}236(4) - 0{,}1(3)$

$y = \left[\frac{1}{1{,}2(27)} + \frac{(0{,}5)^2}{0{,}(6)} - \frac{2^2}{27} - \frac{3}{8} + 1\right]^{2001}$.

17.Rezolvarea şi alcătuirea de ecuații, inecuații şi probleme care presupun operațiile învățate

Dându-se numerele raționale a, b şi c cu $a \neq 0$ ***să se găsească numărul rațional x pentru care*** $a \cdot x + b = c$.

Problema se poate formula astfel:

Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $a \cdot x + b = c$.

A rezolva ecuația înseamnă ***a găsi soluția*** sau ***mulțimea soluțiilor ecuației***.

Analog pentru inecuații de forma $a \cdot x + b < c$, $a \cdot x + b \leq c$, $a \cdot x + b > c$, $a \cdot x + b \geq c$.

Exerciții

❒1. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + 25{,}17 = 32{,}15$; b) $235 + x = 347{,}59$; c) $1257 + x = 2000{,}34$;

d) $x - 176 = 121{,}36$; e) $x + 12{,}5 - 10{,}6 = 40{,}01$;

f) $x - 14{,}78 = 101{,}57$; g) $437 - x + 2{,}135 = 300{,}3$;

h) $314 - 136{,}85 + x = 379$; i) $37{,}5 + 14{,}07 - x = 17{,}03$.

❒2. Rezolvați ecuațiile:

a) $37,56 + 47,05 - x = 17,017$; b) $2,1(3) + 3,(11) + x = 17$;

c) $1,(85) + 3,1(41) = x + 2,(1)$; d) $x - (10,07 + 3,03) = 1,01$;

e) $x - (11,53 + 1,07) = 2,3(7)$; f) $23,0(3) + 4,1(6) + x = 100 - 12,(5)$.

❒3. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $35,1 \cdot x = 175,5$; b) $x \cdot 838,32 = 1257,48$; c) $9,57 \cdot x = 76,56$;

d) $3,1 \cdot x = 1,24$; e) $14,1(6) : x = 1,7$; f) $x : 7,4 = 5,6$;

g) $23,576 : x = 29,47$; h) $14,7 : x = 0,54$;

i) $[4,(5) + 2,3] \cdot x = 4,1(6) \cdot 6,17$.

❒4. Rezolvați ecuațiile, scriind rezultatele sub formă de fracții zecimale:

a) $x \cdot 14 = 5,6$; b) $24 \cdot x = 12$; c) $\frac{1}{3} \cdot x = 10$;

d) $4 = \frac{1}{7} \cdot x$; e) $x \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$; f) $\frac{x}{200} \cdot 4 = 5$.

❒5. Determinați numerele naturale x, care verifică inecuațiile:

a) $x + 1,25 < 7,05$; b) $x - 1,7 \leq 3,25$; c) $5 \cdot x \leq 14,75$;

d) $x : 7,53 < 1,24$; e) $3,25 - x \geq 1$; f) $3,4 \cdot x \leq 9,8$.

❒6. Suma a două numere este 2,45, iar unul dintre ele este de 4 ori mai mic decât celălalt. Determinați numerele.

❒7. Diferența a două numere este 47,18, iar unul dintre ele este de 24,59 ori mai mare decât celălalt. Calculați numerele.

❒8. Calculați x din egalitățile:

a) $x + 14,537 = 124,58$; b) $4,7 + x = 49$; c) $x - 2,5 = 0,02$;

d) $14,7 - x = 10,031$; e) $12x = 36$; f) $x : 1,7 = 5,4$.

❒9. Calculați $x \in \mathbf{N}^*$ din inegalitățile:

a) $x + 12,5 < 16,4$; b) $x \cdot 3,4 < 15,7$; c) $14,7 - x > 11,3$;

d) $x - 2,6 < 1,07$; e) $x \cdot 3,8 < 10,5$.

❒10. Rezolvați ecuațiile și precizați dacă soluțiile aparțin mulțimii numerelor naturale:

a) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{5}{7}$; b) $1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 4$; c) $0,11x - 0,01 = 0,1$;

d) $0,9x - 0,5 = 0,4$; e) $1,8x - 0,6 = 3$; f) $6x + \frac{1}{2} = 7$.

❒11. Rezolvați ecuațiile:

a) $0,(1)x + 1,(1) = 2,(1)$; b) $0,4x - \frac{11}{2} = 2\frac{1}{2}$;

c) $0,2x - 0,02 = 0,002$; d) $1,2(5) \cdot x - 1,0(1) = 4,0(1)$;

e) $1,1x - 10,988 = 0,012$; f) $2,1(3)x - 2,6 = 7$.

❒12. Rezolvați ecuațiile:

a) $(3x + 0,1) : 1,6 = \left(1\frac{3}{4}\right)^2$; b) $(2x + 1) : 1,750 = \frac{4}{7}$;

c) $(x + 0,21 + 0,1025) : 1,25 = 0,15 + 0,01 \cdot 10$;

d) $(0,4 + 0,2x) \cdot 2 = \frac{5}{3} - 0,(6)$.

18. Media aritmetică a două sau mai multor numere; aplicații

Media aritmetică a n numere raționale se obține împărțind suma acestor numere la n.

Exemple:

a) Media aritmetică a numerelor 0,15; 1,24 și 2 este:

$$m_a = \frac{0,15 + 1,24 + 2}{3} = \frac{3,39}{3} = 1,13.$$

b) Media aritmetică a numerelor $2\frac{1}{3}$; 0,25; 0,8 și $\frac{1}{2}$ este:

$$m_a = \frac{2\frac{1}{3} + 0,25 + 0,8 + \frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{7}{3} + \frac{25}{100} + \frac{8}{10} + \frac{1}{2}}{4} =$$

$$= \frac{\overset{20)}{\frac{7}{3}} + \overset{15)}{\frac{1}{4}} + \overset{12)}{\frac{4}{5}} + \overset{30)}{\frac{1}{2}}}{4} = \frac{\frac{140 + 15 + 48 + 30}{60}}{4} =$$

$$= \frac{\frac{233}{60}}{4} = \frac{233}{60} \cdot \frac{1}{4} = \frac{233}{240}.$$

Observații:

1) ***Media aritmetică a două numere raționale*** este mai mică decât cel mai mare dintre ele și mai mare decât cel mai mic dintre ele, dacă cele două numere sunt diferite și este egală cu fiecare dintre ele dacă cele două numere sunt egale.

2) ***Media aritmetică a mai multor numere raționale*** este mai mică decât cel mai mare dintre ele și mai mare decât cel mai mic dintre ele, dacă cel puțin două dintre ele sunt diferite.

Exerciții

❒1. Media aritmetică a două numere este 34 iar unul dintre ele este 49. Calculați celălalt număr.

❒2. Media aritmetică a trei numere este 31, iar două dintre ele sunt 24,7 și 15. Calculați cel de-al treilea număr.

❒3. Media aritmetică a trei numere este $\frac{1}{7}$. Calculați suma numerelor.

❒4. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) 3; 7 și 10; b) $\frac{1}{2}$; 2 și 0,25; c) $2\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; 0,1(3);

d) 1; 2; 5 și 1 e) 0,15; 0,3; 1; f) 3,2; 2; $\frac{2}{5}$; 1,25.

❒5. Suma a trei numere este 2,7. Aflați media lor aritmetică.

❒6. Media aritmetică a numerelor a și b este 4,5, media aritmetică a numerelor a și c este 8,5 și media aritmetică a numerelor b și c este 11. Calculați media aritmetică a numerelor a, b, și c.

❒7. Cu cât se modifică media aritmetică a numerelor 11,7; 22,5; 17,3 și 15,4 dacă se mai adaugă numărul 7,5?

❒8. Media aritmetică a trei numere este 144 iar media aritmetică a două dintre ele este 78,5. Care este al treilea număr?

❒9. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) $x = (12{,}1 - 11{,}9) : 4 + 4{,}5$; $y = \frac{(2{,}3+1{,}5)\cdot 12{,}5}{2{,}05-1{,}25}$;

b) $x = \frac{(3{,}15+4{,}05)\cdot 36{,}9}{(17{,}5-10{,}3)\cdot 0{,}41}$; $y = \frac{21{,}7\cdot(11{,}8-4{,}5)}{14\cdot\left[3\frac{2}{3}-3{,}1(6)\right]}$.

c) $x = \frac{\frac{3}{5}:1\frac{2}{7}+\frac{3}{14}:\frac{3}{28}\cdot 2\frac{1}{3}}{\left(10\frac{1}{3}:2\frac{1}{15}+2\right)\cdot\frac{1}{5}}$; $y = \frac{\frac{12}{5}:\frac{48}{25}+\frac{14}{5}:\frac{42}{10}}{\frac{72}{24}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{7}\cdot\frac{49}{9}}\cdot 2\frac{9}{23}$.

❒10. Media aritmetică a trei numere pare consecutive este 102. Să se afle numerele.

❒11. Media aritmetică a trei numere este 37,(3) și media aritmetică a ultimelor două numere este 54. Să se afle numerele știind că al treilea este cu 44 mai mare decât al doilea.

❒12. Calculați media aritmetică a trei numere știind că două câte două au media aritmetică: 11, 36 și respectiv 32.

❒13. Să se calculeze patru numere știind că trei câte trei au media aritmetică: 20,6(3); 22,7(3); 18,8 și respectiv 17,6(3).

❒14. Media aritmetică a șase numere este 70. Calculați media aritmetică a trei dintre acestea știind că media aritmetică a celorlalte trei este 60.

❒15. Media aritmetică a trei numere este 28. Să se afle unul dintre ele știind că media aritmetică a celorlalte două este 35.

❒16. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) $\frac{1}{4}$; 0,2; $2\frac{1}{5}$; 0,59; b) 3,7; 0,9; 1,11; $1\frac{1}{4}$;

c) 0,74; 0,7; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{7}{10}$; d) $2\frac{1}{5}$; 70; 11,3; 4,1;

e) 0,73; 0,15; 1,32; 14; f) $3\frac{1}{6}$; 4; $7\frac{1}{2}$; 10.

❒17. Media aritmetică a trei numere este 21,7. Calculați suma acestor numere.

❒18. Dacă y este media aritmetică a numerelor x și z și dacă $x < z$ scrieți numerele x, y și z în ordine descrescătoare.

19. Raport, procent

Fie a și b numere raționale pozitive, $b \neq 0$. ***Raportul*** lor este $\frac{a}{b}$, iar $k = \frac{a}{b}$ este ***valoarea raportului*** $\frac{a}{b}$.

Observații:

- a și b sunt ***termenii raportului***.
- Dacă a și b sunt mărimi exprimate cu aceeași unitate de măsură, atunci ***raportul mărimilor*** este ***raportul numerelor*** care exprimă cele două măsuri.

Exemple:

De câte ori este mai mică lățimea unui dreptunghi față de lungimea acestuia dacă L = 12 cm și $\ell = 6$ cm.

Avem $\frac{L}{\ell} = \frac{12\,cm}{6\,cm} = 2$, deci lățimea este de două ori mai mică decât lungimea.

- Dacă termenii raportului sunt două măsuri diferite, exemplu ***distanță*** și ***timp*** atunci ***raportul lor*** este o mărime nouă, ***viteza***.

Exemplu:

Trenul accelerat 1651 a parcurs distanța de 238 km în 2 ore. Care a fost viteza trenului?

$$V = \frac{d}{t} = \frac{238\,km}{2\,h} = 119\,km/h\,.$$

Raportul de forma $\frac{p}{100}$ $(p \in \mathbf{Q},\ p \geq 0)$ se numește ***raport procentual***.

Observații:

p% se citește „***p la sută***" sau „***p procente***" și înseamnă $\frac{p}{100}$.

Exerciții

❒**1.** Lungimea unui dreptunghi este de 10 m și lățimea de 2 m. Completați:

a) Raportul dintre lungimea și lățimea dreptunghiului este .....; acest raport arată că lungimea este de ..... ori mai mare decât lățimea sau că lățimea dreptunghiului este de ..... ori mai mică decât lungimea.

b) Raportul dintre lățimea și lungimea dreptunghiului este .....; acest raport arată că lățimea este ..... din lungime.

❒**2.** Lungimea unui teren în formă de dreptunghi este de 20 km și lățimea 80 hm.

a) Care este raportul dintre lungimea L și lățimea ℓ a terenului? Ce reprezintă acest raport?

b) Care este raportul dintre lățimea ℓ și lungimea L a dreptunghiului? Ce reprezintă acest raport?

❒**3.** Știind că $\frac{a}{b} = 7$ și $\frac{c}{b} = 21$, să se calculeze $\frac{a}{c}$.

❒**4.** Pentru 4 kg de mere se plătesc 76 000 lei. Ce reprezintă raportul $\frac{76000}{4}$?

❒**5.** Numărul a este de 5 ori mai mic decât numărul b și $\frac{1}{7}$ din numărul c. Calculați:

a) raportul dintre a și b;

b) raportul dintre a și c;

c) raportul dintre 5 și $\frac{1}{7}$;

d) raportul dinte c și b;

e) de câte ori este mai mare c decât b;

f) cât la sută din b este c.

❒**6.** Se dă $\frac{a}{b} = 0{,}2$. Calculați: a) $\frac{2a}{3b}$; b) $\frac{2a+b}{b}$; c) $\frac{3b}{a+3b}$.

❒**7.** Calculați valoarea rapoartelor: $\frac{0,(3)}{5}$; $\frac{0{,}1}{7}$; $\frac{2{,}1(3)}{32}$.

❒**8.** Dacă 4a = 3b, calculați $\frac{a}{b}$.

❒**9.** Raportul dintre lățimea și lungimea unui dreptunghi este de $\frac{1}{4}$. Dacă perimetrul este de 100 m calculați dimensiunile dreptunghiului.

❒**10.** Dacă $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$, calculați: $\frac{y-x}{x}$; $\frac{x+y}{y}$; $\frac{3x-y}{x}$; $\frac{2x+y}{y-x}$; $\frac{3x-y}{2x+y}$.

❒**11.** Diferența a două numere este 0,25 iar raportul lor este $\frac{2}{3}$. Aflați numerele.

❒**12.** Suma a două numere este 120,45 și raportul lor este $\frac{1}{2}$. Aflați numerele.

❒**13.** Calculați raportul dintre:

a) 14,15 m și 0,3 m; b) 30 cm și 1,5 m; c) $2\frac{1}{5}$ kg și $1\frac{3}{5}$ dag;

d) 1,7 hg și 425 g; e) 1 ℓ și 0,05 hl; f) 4 ℓ și 5,76 dl.

❒**14.** Mihaela citește o carte în trei zile. În prima zi citește $\frac{1}{3}$ din carte, a doua zi $\frac{1}{4}$ din rest și a treia zi restul. Calculați:

a) raportul dintre numărul paginilor citite în prima zi și numărul paginilor citite a doua zi;

b) raportul dintre numărul paginilor citite în prima zi și cel al paginilor citite a treia zi;

c) raportul dintre numărul paginilor citite a doua zi și numărul paginilor citite a treia zi în cazul când: 1) cartea are 48 pagini;
2) cartea are 54 pagini.

Ce observați?

d) Câte pagini a citit Mihaela în fiecare zi în cazurile 1) și 2) de la c)?

❒**15.** Două pătrate au laturile de 0,5 m și 25 cm.

a) Calculați raportul laturilor lor.

b) De câte ori este mai mică latura celui de al doilea pătrat față de latura primului pătrat?

c) Calculați perimetrele celor două pătrate și raportul acestora. Ce constatați?

20. Mulțimea numerelor raționale

Numerele raționale sunt numerele care se reprezintă fie cu ajutorul ***fracțiilor ordinare***, fie cu ajutorul fracțiilor ***zecimale finite*** sau ***periodice***.

Exemple:

a) fracții ordinare: $\frac{30}{8}, \frac{1}{8}, 2$;

b) fracții zecimale finite: 0,5; 7,325; 1,175;

c) fracții zecimale infinite, periodice simple: 2,(5); 0,(21); 1,(13);

d) fracții zecimale infinite, periodice mixte: 0,08(3); 0,2(5); 1,1(3).

- ***Orice număr rațional se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică, care nu are perioada (9).***
- ***Orice fracție zecimală periodică, care are perioada diferită de 9, reprezintă un număr rațional din care se obține prin algoritmul de împărțire.***

Numerele raționale (și numai ele) se reprezintă sub formă de fracții zecimale infinite periodice.

Un număr rațional pozitiv poate fi reprezentat sub forma $\frac{a}{b}$ unde a, $b \in \mathbf{N}^*$.

Mulțimea numerelor raționale pozitive este $\mathbf{Q}_+^* = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbf{N}^* \right\}$.

0 și 1 sunt numere raționale; 0 este numărul ***rațional nul***, iar 1 este numărul ***rațional unitate***.

Oricărui număr rațional pozitiv $\frac{a}{b}$ i se asociază numărul rațional negativ $-\frac{a}{b}$ numit ***opusul*** numărului rațional $\frac{a}{b}$. Opusul numărului rațional 0 este 0.

Mulțimea numerelor raționale negative este $\mathbf{Q}_-^* = \left\{ -\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbf{N}^* \right\}$.

Mulțimea numerelor raționale este: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+^* \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}_-^*$.

Mulțimi de numere:

- mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$;
- mulțimea numerelor raționale: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^* \right\}$.

- ***Orice număr natural este întreg***, deci $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$
  (De exemplu $2 \in \mathbf{N}$; $2 = +2 \in \mathbf{Z}$)
- ***Orice număr întreg este rațional***, deci $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$
  (De exemplu $-7 \in \mathbf{Z}$; $-7 = -\frac{7}{1} \in \mathbf{Q}$)

Toate numerele învățate până acum sunt numere raționale.

Pe mulțimea numerelor raționale **Q** sunt definite: ***egalitatea, adunarea, înmulțirea*** și ***relația de ordine*** $\leq$.

Egalitatea a două numere raționale este ***reflexivă, simetrică și tranzitivă***.

Adunarea numerelor raționale este ***asociativă, comutativă***, 0 este element neutru la adunare și orice număr rațional adunat cu opusul său dă numărul rațional nul.

Înmulțirea numerelor raționale este ***asociativă***, 1 este ***element neutru*** la înmulțire și orice număr rațional $\frac{a}{b}$, nenul are un ***invers*** $\frac{b}{a}$, iar $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$; înmulțirea este ***distributivă față de adunare***.

Observații:

1) ***Scăderea*** numerelor raționale se definește cu ajutorul adunării (*adunarea cu opusul*): $x - y = x + (-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{Q}$.

2) Împărțirea numerelor raționale se definește cu ajutorul înmulțirii (*înmulțire cu inversul*): $x : y = x \cdot \frac{1}{y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{Q}$, $y \neq 0$.

Exerciții

❒**1.** Transformați în fracții ireductibile:

a) 0,25; 0,(2); 0,2(3); b) 13,5; 2,(23); 4,2(34).

❒**2.** Transformați în fracții zecimale:

a) $\frac{1}{2}; \frac{9}{4}; \frac{7}{100}$; b) $\frac{1}{3}; \frac{2}{9}; \frac{4}{11}$; c) $\frac{1}{6}; \frac{5}{18}; \frac{7}{22}$.

❒**3.** Demonstrați că fracția zecimală 0,1010010001000010000001… (după primul 1 este 0, după al doilea sunt doi de zero etc.) nu este număr rațional.

4. Calculați:

a) $32,6 + 3,26 + 0,326$; b) $4,2 - 1,23$; c) $2,8 \cdot 3,7$; d) $0,768 : 3,2$;

e) $(0,3^2 + 0,2^3) \cdot 100$; f) $10 - 3,7 - 4,9$; g) $10 - (3,7 + 4,9)$.

5. Calculați: a) $12 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)$; b) $(5 + 5 : 5) : \frac{2}{5}$;

c) $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] : \frac{3}{2}$; d) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 : \frac{1}{9}$.

6. Calculați: a) $0,(2) + 0,2 + 0,1(2)$; b) $3,(5) - 2,(24)$;

c) $13,6 - \frac{13}{10} : \left[\frac{5}{2} + 3,(3) + 0,75\right] + 2 \cdot 0,28$.

7. Calculați:

$$25 + \{[3,(63) + 0,(81)] \cdot 0,(142857)\} : \{[0,0(8) + 0,0(7)] \cdot \frac{69}{2} \cdot 0,(5873)\}.$$

8. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x + \frac{1}{4} = 1$; b) $\frac{2}{5} + x = 2$; c) $x - \frac{3}{5} = \frac{2}{7}$; d) $\frac{7}{3} - x = \frac{1}{5}$;

e) $\frac{1}{3} \cdot x = \frac{1}{4}$; f) $x : \frac{3}{4} = 3$.

9. Să se afle $x \in \mathbf{Q}$ dacă $\left[\left(1,5^2 + x\right) \cdot \frac{1}{5}\right] : 0,1 = 10$.

10. Găsiți cel mai mic număr natural x care verifică relația

$$10,5x + 6 > 17,55.$$

11. Să se determine $x \in \mathbf{N}$ astfel știind că $\frac{7}{x-3} \in \mathbf{N}$.

12. Fie n un număr natural oarecare. Să se arate că numerele raționale $\frac{2n+3}{5}$ și $\frac{3n+4}{5}$ nu pot fi simultan naturale.

13. Demonstrați că numerele raționale $\frac{\overline{abbab} - 100b}{7}$ și $\frac{\overline{abbab} - 100b}{11}$ sunt numere naturale.

14. Mihai a răspuns corect la $\frac{3}{5}$ din numărul de întrebări ale unui test, iar Adi a răspuns corect la $\frac{3}{10}$ din numărul întrebărilor aceluiași test. De câte ori este mai mare numărul răspunsurilor lui Mihai față de ale lui Adi?

15. Un elev a cheltuit o sumă de bani în 5 zile. Știind că în prima zi a cheltuit $\frac{1}{5}$ din sumă, a doua zi $\frac{1}{4}$ din rest, a treia zi $\frac{1}{3}$ din noul rest, a patra zi $\frac{1}{2}$ din noul rest și a cincea zi 3000 lei, aflați cât a cheltuit în fiecare zi.

16. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbf{N} \;\middle|\; x > 2 \text{ și } \frac{2x+5}{x-2} \notin \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}\right\}$.

17. Să se afle numărul rațional x știind că înmulțindu-l cu $\frac{2}{7}$ obținem același rezultat ca atunci când scădem 30 din el.

18. Se consideră două numere raționale x și y. Numărul x se mărește cu $\frac{4}{5}$ din el, iar numărul y se micșorează tot cu $\frac{4}{5}$ din el. Produsul numerelor astfel obținute este 900. Să se calculeze xy.

19. Se consideră două numere raționale pozitive x și y. Știind că y este $\frac{3}{5}$ din x și $xy = 135$ să se afle $x + y$.

20. Să se afle două numere raționale a și p știind că a este $\frac{1}{6}$ din p și $a + 1$ este $\frac{1}{5}$ din $p - 1$.

21. Probleme recapitulative

1. Efectuați, grupând convenabil:

a) $11 \cdot \left(\frac{9}{11} + \frac{4}{33} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right) : \frac{19}{12}$;

b) $\left(\frac{14}{15} - \frac{2}{15} + \frac{19}{20} - \frac{9}{20}\right) \cdot 10 - \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{7} + \frac{3}{14} + \frac{7}{14}\right)$.

2. Calculați:

a) $10 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} : 1\frac{1}{9} + \left(3\frac{1}{12} + 1\frac{5}{12}\right) : 1\frac{1}{2}$;

b) $\frac{11}{12} : \frac{7}{24} \cdot \frac{21}{22} + \left(2\frac{2}{7} + 1\frac{1}{7}\right) \cdot 1\frac{1}{6}$;

c) $\frac{12}{3}\cdot\frac{6}{7}:\frac{4}{7}-\left(4\frac{3}{5}-1\frac{2}{5}\right)\cdot 1\frac{7}{8}$;

d) $\frac{9}{10}:\left[\left(6\frac{3}{8}-4\frac{1}{8}\right):2\frac{1}{2}\right]+\frac{8}{15}\cdot\left(\frac{15}{16}:\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)$.

3. Să se efectueze:

a) $12\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-8\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)$;

b) $\frac{15}{24}:\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)-\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+\frac{1}{4}\right)$;

c) $4\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)-3\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{15}+\frac{3}{10}\right)$;

d) $2\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}-\frac{1}{15}\right)$.

4. Calculați și comparați rezultatele:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7$;

b) $0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}4+0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}6\cdot 0{,}7$;

c) $0{,}1\cdot 2+0{,}2\cdot 3+0{,}3\cdot 4+0{,}4\cdot 5+0{,}5\cdot 6+0{,}6\cdot 7$;

d) $1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}6+6\cdot 0{,}7$.

5. Efectuați:

a) $\frac{1}{25}:\left(0{,}38\cdot\frac{2}{9}\right)+11\frac{11}{100}:\left(13{,}13:1\frac{2}{11}\right)-\frac{9}{50}:\left(\frac{3}{8}\cdot 0{,}48\right)+\left(3{,}16:\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{100}{553}$;

b) $\frac{10}{69}\cdot\left(0{,}169:\frac{13}{14}\right)-\left(3\frac{1}{2}+1-3\frac{1}{2}\right)+55\frac{3}{5}:\left(5{,}35+12\frac{3}{4}+37{,}5\right)$;

c) $11\frac{1}{3}:\frac{4}{21}:4\frac{1}{4}-7\frac{1}{8}:4\frac{3}{4}\cdot 8-2\frac{2}{3}:\left(1\frac{7}{9}\cdot 2\frac{2}{5}:1\frac{3}{5}\right)-\frac{86}{119}:\frac{43}{51}$.

6. Calculați:

a) $1+2+3+\ldots+100$;

b) $1+3+5+\ldots+99$;

c) $2+4+6+\ldots+100$;

d) $1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2$.

7. Calculați:

$$E=2\frac{1}{3}-\frac{3x-2}{3}+\frac{(2x+3)(3x+4)}{12}, \text{ pentru}$$

a) $x=1$;

b) $x=0{,}(6)$.

8. Să se calculeze:

a) $\frac{357}{10}:\left(8{,}95+5{,}875+20\frac{7}{8}\right)+\left[22-\left(4\frac{5}{7}+8{,}49+1{,}51\right)\right]:7\frac{2}{7}$;

b) $2\frac{7}{30}:\left[2{,}1+1\frac{7}{30}-(3-1{,}9)\right]+\left(4{,}7+\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}+3{,}3\right)\cdot\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{40}\cdot\left(76-4\frac{7}{25}+8{,}28\right)-17\frac{2}{5}:\left(8\frac{5}{7}+3{,}15+1\frac{2}{7}+4{,}25\right)$.

9. Efectuați:

a) $6\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right):1{,}1(6)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{4}\right)^0-\frac{1}{2}$;

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)+120\cdot\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)$;

c) $\left(\frac{3}{4}:0{,}03-23{,}5\right):1{,}5+\left(4\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right):4{,}3$;

d) $\left[\frac{0{,}08}{0{,}02}+\frac{3{,}39}{0{,}3}-\left(2-\frac{1}{3}\right):\left(4\frac{1}{6}\cdot 0{,}6\right)\right]\cdot\frac{15}{533}$.

10. Calculați:

a) $2{,}5:20+\left(\frac{3}{6}+\frac{5}{15}+\frac{2}{12}\right):\left(1+\frac{1}{7}\right)$;

b) $\frac{1}{1\frac{3}{16}}+\frac{1}{1\frac{7}{12}}+\frac{1}{1\frac{9}{10}}$;

c) $\left[\left(2+\frac{3}{4}\right):\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{4}+0{,}8(3)\right]:4\frac{1}{12}$;

d) $\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{11}+\frac{25}{198}\right):\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}\right)\cdot\frac{398}{1005}$;

e) $\left[1+\frac{1}{2}+1{,}1(6)+1{,}(3)\right]:[0{,}(6)]^2$.

11. Calculați:

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)$;

b) $\left(1+\frac{1}{4}\right)^{2001}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)^{2001}$;

c) $(2^{171}+|2^{171}-3^{114}|):(2^5-2^2-1)^{37}$.

❒12. Fie a, b, c, d şi e cifre în baza zece şi:

$$\frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1000}+\frac{d}{10000}+\frac{e}{100000}=\frac{12201}{12500}.$$

Calculaţi $\left(\overline{ab}^{c}+\overline{ae}^{c}\right)^{d}:e$.

❒13. Determinaţi cea mai mică şi cea mai mare fracţie de forma $\frac{\overline{2a3b}}{\overline{a1b}}$ care se simplifică cu 15.

❒14. a) Arătaţi că fracţia: $\frac{\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc}}{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}$ este echiunitară, oricare ar fi a, b, c cifre nenule în baza zece.

b) Rezultatul de la a) rămâne valabil dacă a, b şi c sunt cifre nenule în baza 2?

c) Arătaţi că rezultatul de la a) rămâne valabil dacă a, b şi c sunt cifre nenule în baza x.

❒15. Dacă a, b şi c sunt numere naturale prime, distincte două câte două, atunci:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)<\frac{1}{3}.$$

❒16. Pentru x = 2 calculaţi:

$$\frac{x}{1-\frac{1}{x}}-\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}.$$

❒17. Pentru a = 1, b = 3, $c=\frac{1}{3}$ arătaţi că:

a) abc = 1;

b) $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$.

❒18. Fie $x=\frac{a+2^{21}}{a+3^{14}}$ şi $y=\frac{b+2^{24}}{b+3^{12}}$, unde a, b ∈ **N**. Arătaţi că:

a) x < y, oricare ar fi a, b ∈ **N**;

b) Dacă a = b = 0, atunci $\frac{x}{y}<\frac{1}{2\cdot5\cdot7}$.

❒19. Fie x ∈ **N** şi $\frac{x-3}{5}\in$ **N**. Arătaţi că x nu poate fi pătrat perfect.

❒20. Fie a, b ∈ **N** şi $x=\frac{a+2b}{1+3b}$, $y=\frac{1+3b}{4}$ şi $z=\frac{4}{a+2b}$.

a) Arătaţi că $xy+xz+yz=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

b) Determinaţi a şi b pentru care x, y şi z sunt simultan numere naturale.

❒21. Determinaţi x ∈ **N*** pentru care $\frac{7}{2x-1}$:

a) este subunitară; b) reprezintă un număr natural;
c) are partea întreagă 1; d) este supraunitară.

❒22. Fie x, y ∈ **N*** astfel încât $\frac{1}{2x}-\frac{1}{3y}=\frac{1}{xy}$.

a) Calculaţi $\frac{y}{x+3}$ cu aproximaţie de o sutime prin adaos.

b) Arătaţi că 12 | xy.

c) Dacă $\frac{1}{y+2}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{18}$ calculaţi x şi y.

❒23. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) x + 3x + x = 7,5; b) 2,7 + 0,5 + x = 4;
c) x · (43 – 31) = 24; d) (23 + 1,5) · x = 49;
e) 324 : x = 3,24; f) x – 12,6 = 23,4;
g) x : 7 = 16,8; h) x + x + 1 + 3 + 2x = 7,2;
i) 3x + 4 = 2x + 6; j) 7 · (2x – 5) = 35.

❒24. Determinaţi perechile de numere naturale (a, b) care verifică relaţia:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}=\frac{2}{3}.$$

❒25. Determinaţi x ∈ **N** ştiind că:

a) $\frac{7}{15}<\frac{1}{x}<\frac{7}{13}$; b) $\overline{0,(11x)}+\overline{0,(22x)}+\ldots+\overline{0,(99x)}=x$;

c) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{5}{3}$.

CAPITOLUL ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

1. Figuri geometrice. Instrumente geometrice. Desenarea figurilor geometrice

Geometria este una din cele mai vechi științe. Cuvântul „geometrie" este de origine greacă („geo" = pământ; „metron" = măsură), deci ar însemna măsurarea pământului.

Iată câteva exemple de ***noțiuni geometrice***: punct, dreaptă, segment, lungimea unui segment, semidreaptă, triunghi etc.

Principalul mijloc de reprezentare a noțiunilor geometrice este desenul pe foaia caietului sau pe tabla clasei în care învățăm. Se obțin în acest fel ***figuri geometrice***. Instrumentele folosite pentru desenarea figurilor geometrice sunt: ***rigla***, (negradată și gradată), ***compasul***, ***echerul*** și ***raportorul***.

Punctul, cel mai adesea, se reprezintă prin semnul ortografic „punct" (A și B în figura 1). Uneori este convenabil să reprezentăm punctul prin „intersecții" (C și D în figura 1).

Fig. 1

Fig. 2

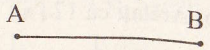


Fig. 3

Dreapta (linia dreaptă) se desenează cu ajutorul ***riglei*** (fig. 2).

Segmentul determinat de două puncte A și B, notat [AB] se desenează cu ajutorul riglei, unind punctele A și B (fig. 3).

Lungimea unui segment [AB], notată $|AB|$ sau mai simplu AB, se obține utilizând ***rigla gradată***. (fig. 4).

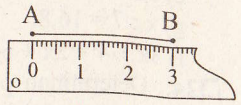


Fig. 4

Semidreapta de origine A și care conține punctul B, notată [AB, se desenează cu ajutorul riglei (fig. 5).

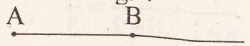


Fig. 5

Unghiul se obține desenând cu ajutorul riglei două semidrepte care au aceeași origine (fig. 6). Originea comună se numește ***vârful*** unghiului, iar cele două semidrepte se numesc ***laturile*** unghiului (fig. 6).

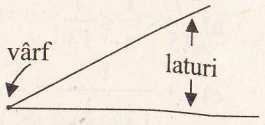


Fig. 6

Notăm un unghi cu ajutorul literelor mari de tipar: ◁ AOB sau AOB și citim „unghiul AOB (fig. 7) sau notăm ◁O sau Ô și citim „unghiul O" (fig. 8).

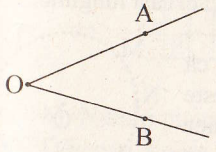


Fig. 7

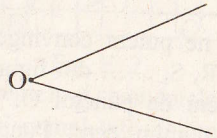


Fig. 8

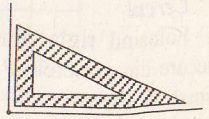


Fig. 9

Folosind ***echerul*** putem desena un ***unghi drept*** (fig. 9), iar cu ajutorul ***raportorului*** – așa cum vom vedea mai târziu putem măsura unghiul.

Triunghiul determinat de trei puncte A, B, C care nu sunt în linie dreaptă, notat Δ ABC se desenează unind cu ajutorul unei rigle cele trei puncte (fig. 10).

– punctele A, B, C sunt ***vârfurile*** triunghiului;

– segmentele [AB], [BC], [CA] sunt ***laturile*** triunghiului;

– suma lungimilor laturilor triunghiului este ***perimetrul*** triunghiului.

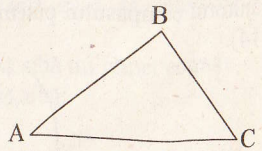


Fig. 10

Patrulaterul ABCD (patrulater = patru laturi)

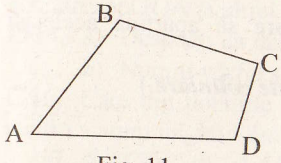


Fig. 11

– punctele A, B, C, D sunt ***vărfurile*** patrulaterului;

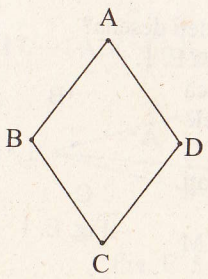
– segmentele [AB], [BC], [CA], [CA] sunt ***laturile*** patrulaterului;

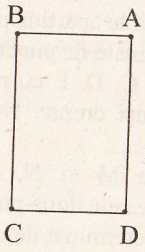
– unghiurile ◁DAB, ◁ABC, ◁BCD, ◁CDA sunt ***unghiurile*** patrulaterului;

– suma lungimilor laturilor patrulaterului este ***perimetrul*** patrulaterului.

Patrulatere particulare (fig. 12)

Rombul ***Dreptunghiul*** ***Pătratul***





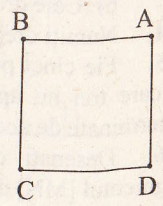


Fig. 12

- ***rombul*** este un patrulater cu toate laturile de aceeaşi lungime;
- ***dreptunghiul*** este un patrulater cu toate unghiurile drepte;
- ***pătratul*** este un dreptunghi cu toate laturile de aceeaşi lungime.

Cercul

Folosind rigla gradată ne putem convinge uşor că fiecare din punctele P, Q, R, S, ... din figura 13 este situat la distanţa de 1,5 cm de punctul O. Mulţimea tuturor acestor puncte o numim ***cerc***. Punctul O se numeşte ***centrul*** cercului, iar numărul r = 1,5 cm se numeşte ***raza*** cercului.

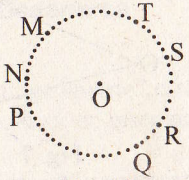


Fig. 13

Cercul de centru O şi de rază r se notează cu $\mathcal{C}(O; r)$.

Instrumentul cu ajutorul căruia desenăm un cerc este ***compasul***. Tot cu ajutorul compasului putem desena şi ***linii curbe*** numite mai scurt ***curbe***. (fig. 14).

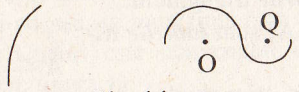


Fig. 14

Exerciţii

❒**1.** a) Utilizând rigla desenaţi trei puncte care să aparţină aceleiaşi drepte, dar nu desenaţi dreapta.

(Cele trei puncte astfel desenate se numesc ***puncte coliniare***.)

b) Notaţi cele trei puncte.

❒**2.** a) Desenaţi o dreaptă d.

b) Desenaţi două puncte A şi B, apoi desenaţi dreapta AB determinată de cele două puncte.

❒**3.** a) Desenaţi un punct A şi trei drepte a, b şi c cărora să le aparţină punctul A.

b) Câte drepte cărora să le aparţină punctul A puteţi desena?

❒**4.** Numiţi dreptele determinate de punctele din figura E. 1.

❒**5.** Fie cinci puncte A, B, C, D, E cu proprietatea că oricare trei nu aparţin aceleiaşi drepte. Numiţi dreptele determinate de aceste puncte.

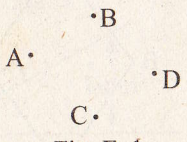


Fig. E. 1

❒**6.** Desenaţi două puncte M şi N, apoi desenaţi segmentul [MN] determinat de cele două puncte.

❒**7.** Desenaţi un segment determinat de două puncte M şi N şi un punct Q care să nu aparţină acestui segment.

❒**8.** a) Desenaţi în caietul vostru figura E. 2.

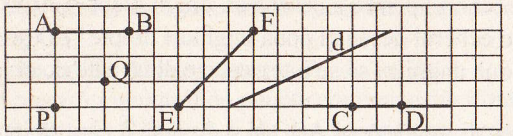


Fig. E. 2

b) Numiţi punctele, dreptele şi segmentele desenate.

❒**9.** Desenaţi figura E. 3 şi completaţi cu simbolurile $\in$ sau $\notin$ pentru a obţine propoziţii adevărate:

a) M ... AB; b) C ... [AB];

c) B ... [AC]; d) N ... (AC).

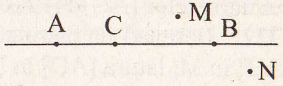


Fig. E. 3

❒**10.** Desenaţi un segment [PQ] cu lungimea de 1,5 cm.

❒**11.** Desenaţi un segment [CD] şi o linie frântă care să intersecteze segmentul în cinci puncte M, N, P, Q, R.

❒**12.** Desenaţi două semidrepte [AB şi [DC care să aibă un punct comun.

❒**13.** Desenaţi două semidrepte [AB şi [CD care să aibă:

a) nici un punct comun;

b) un punct comun;

c) un segment comun;

d) o semidreaptă comună.

❒**14.** Desenaţi o semidreaptă [OA şi un punct B pe semidreaptă. Numiţi semidreapta [OA şi altfel.

❒**15.** a) Desenaţi un unghi $\sphericalangle AOB$.

b) Numiţi vârful şi laturile unghiului.

❒**16.** Care din notaţiile următoare sunt corecte pentru a numi unghiul din figura E. 4.

a) $\sphericalangle ACD$; d) $\sphericalangle ACE$; g) $\sphericalangle ABC$;

b) $\sphericalangle C$; e) $\sphericalangle ECB$; h) $\sphericalangle ABE$;

c) $\sphericalangle BCD$; f) $\sphericalangle BCE$; i) $\sphericalangle EBC$.

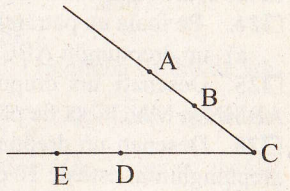


Fig. E. 4

❒**17.** $\sphericalangle ABC$ din figura E. 5 poate fi notat $\sphericalangle B$? Explicaţi!

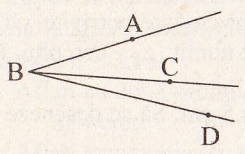


Fig. E. 5

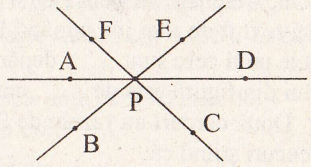


Fig. E. 6

❒**18.** Numiţi toate unghiurile din figura E. 6.

❒19. Folosiți echerul pentru a desena un unghi drept ∢AOB.

❒20. Folosind echerul desenați două unghiuri drepte ∢O și ∢Q astfel încât laturile celor două unghiuri să se intersecteze două câte două în punctele M și respectiv N.

❒21. a) Desenați un triunghi ABC și o dreaptă d care să intersecteze latura [AB] în M și latura [BC] în N .

b) Desenați un triunghi ABC și o dreaptă d care să intersecteze latura [AB] în M, latura [BC] în N și semidreapta [AC în P. Intersecția semidreptelor [AC și [PA este un segment. Numiți acest segment.

❒22. Desenați un patrulater ABCD și o dreaptă d care să intersecteze latura [AB] în M, latura [AD] în N, semidreapta [CB în P și semidreapta [CD în Q.

❒23. a) Ce este un romb?

b) Foaia cu pătrățele ne ajută să desenăm rapid un romb. (fig. E. 7): AO = OC și OB = OD, iar ∢AOB este drept (verificați folosind echerul!). Desenând segmentele [AB], [BC], [CD] și [DA] se obține rombul ABCD. Folosind acest procedeu desenați un romb.

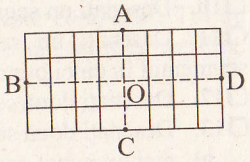


Fig. E. 7

c) Verificați cu ajutorul compasului că toate laturile rombului au aceeași lungime.

d) Dacă AO = OC = OB = OD și ∢AOB este drept, atunci patrulaterul ABCD este pătrat. Desenați în acest mod un pătrat și verificați cu ajutorul compasului că are laturile de lungimi egale, iar cu ajutorul echerului că are toate unghiurile drepte.

❒24. Pe foaia cu pătrățele desenați:

a) un dreptunghi ABCD; b) un pătrat MNPQ

❒25. Desenați un dreptunghi ABCD și un segment [MN] astfel încât ABMN și MNDC să fie pătrate.

❒26. Desenați un dreptunghi ABCD știind că AB = 2 cm și că perimetrul dreptunghiului este de 12 cm.

❒27. Desenați un pătrat știind că perimetrul său este de 12 cm.

❒28. Cu ajutorul unei rigle gradate dați deschiderii compasului o lungime de 2 cm; desenați un punct O și apoi cercul cu centrul în O și raza 2 cm. Copiați textul de mai jos punând în locul punctelor cuvinte potrivite. „Toate punctele unui cerc sunt ..... depărtate de un punct numit ..... cercului. Raza cercului din figură este de ..... cm.

❒29. Două cercuri au razele de 2 cm respectiv 1,5 cm. Să se deseneze cele două cecuri știind că:

a) distanța între centre este mai mare ca suma razelor;

b) distanța între centre este egală cu suma razelor;

c) distanța între centre este mai mică decât suma razelor și mai mare decât diferența razelor;

d) cele două cercuri au același centru.

În fiecare caz precizați numărul de puncte comune celor două cercuri.

❒30. Analizați figurile E. 8 și E. 9. Folosind un compas, desenați în caietul vostru cele două figuri.

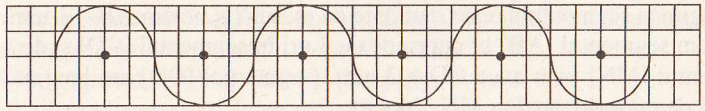


Fig. E. 8

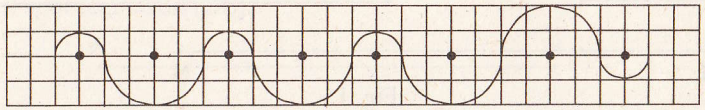
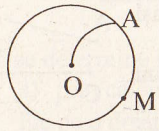
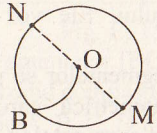


Fig. E. 9

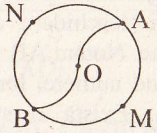
❒31. Analizând figurile E. 10 și E. 11, desenați în caietul vostru figura E. 12.



E. 10



E. 11



E. 12

(**Indicație.** Păstrați aceeași deschidere a compasului.)

❒32. Cu ajutorul unui fir de ață înconjurați un cerc. Lungimea firului de ață reprezintă lungimea cercului (L_{cerc}). Calculați: $\frac{L_{cerc}}{2 \cdot R}$. Refaceți calculele considerând cercuri de raze diferite. Veți obține (de fiecare dată!) aproximativ numărul 3,1. Se poate demonstra că $\frac{L.cerc}{2 \cdot R} = 3,141592653 \ldots$ Acest număr se notează cu o literă grecească π (pi) și astfel rezultă un mod de a calcula lungimea unui cerc când i se cunoaște raza: $L_{cerc} = 2\pi R$. În calcule se folosește π = 3,14.

❒33. Aflați cu două zecimale exacte lungimea unui cerc cu raza de:

a) 4 cm; b) 5 cm; c) 1,5 cm.

❒34. Aflați raza unui cerc care are lungimea de:

a) 6π cm; b) 12π cm; c) 9π cm.

2. Măsurarea segmentelor

A ***măsura*** un segment înseamnă a afla de câte ori se cuprinde un anumit segment, ales ca ***unitate de măsură***, în segmentul dat.

Exemplu:

Dacă alegem segmentul [AB] din figura 15 ca unitate de măsură spunem că lungimea segmentului este o unitate de măsură şi notăm AB = 1 u.m.

Cum segmentul [AB] se cuprinde de 3 ori în segmentul [CD] şi de 4 ori în segmentul [MN] vom avea CD = 3 u.m. (segmentul [CD] are lungimea de 3 unităţi de măsură), analog MN = 4 u.m.

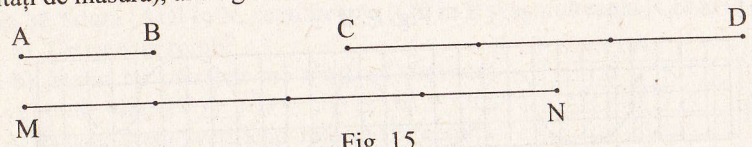


Fig. 15

Deci prin măsurare, oricărui segment îi corespunde un anumit număr de unităţi de măsură numit ***lungimea segmentului***.

Lungimea unui segment depinde de unitatea de măsură aleasă.

Segmentele [AB] şi [CD] din figura 16 sunt cuprinse în aceeaşi deschidere a compasului. Ele vor avea aceeaşi lungime. Notăm AB = CD.

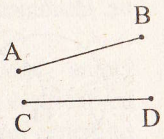


Fig. 16

Fiind numere, lungimile segmentelor se pot aduna sau scădea. Există o situaţie geometrică care conduce la adunarea (scăderea) lungimilor segmentelor. Anume, dacă avem trei puncte A, B, C, situate pe aceeaşi dreaptă astfel încât B să fie situat între A şi C, atunci lungimea segmentului [AC] este egală cu suma lungimilor segmentelor [AB] şi [BC]; notăm: AC = AB + BC. Lungimea segmentului [BC] este diferenţa dintre lungimea segmentului [AC] şi [AB]; notăm BC = AC – AB.

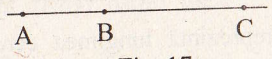
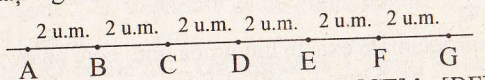


Fig. 17

Exerciţii

❒**1.** Analizaţi figura E. 13



De câte ori se cuprinde [AB] în [CD]? Dar [CE] în [BF]? Dar [BD] în [AG]? Dar [BF] în [AG]?

❒**2.** Fie pe o dreaptă d punctele A, B, C. Ştiind că AB = 10 u.m. şi BC = = 14 u.m. să se determine lungimea segmentului [AC].

❒**3.** Triplul lungimii unui segment [AB] depăşeşte cu 25 u.m. jumătatea lungimii acestuia. Ce lungime are segmentul [AB].

❒**4.** Jumătate din lungimea unui segment [MN] şi încă un sfert din lungimea lui este 96 u.m. Să se calculeze lungimea segmentului [MN].

❒**5.** Fie un segment [AB] şi o semidreaptă [OM. Utilizând compasul găsiţi un punct N pe semidreaptă astfel încât AB = ON.

❒**6.** Fie segmentele [AB], [CD] şi [DE] (fig. E. 14).

a) Utilizând compasul desenaţi aceste segmente în caietul vostru.

b) Măsuraţi segmentul [AB] folosind ca unitate de măsură segmentul [CD] şi apoi segmentul [DE].

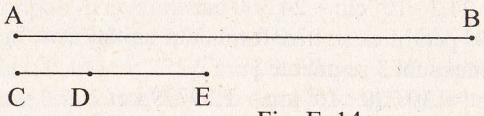


Fig. E. 14

❒**7.** În figura E. 15 avem AB = 1 u.m., AC = 4 u.m., BD = 7 u.m.

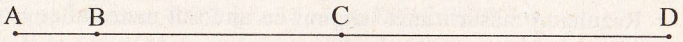


Fig. E. 15

Să se determine lungimile segmentelor [BC], [CD] şi [AD]:

a) prin calcul; b) utilizând compasul.

❒**8.** Fie pe o dreaptă d punctele A, B, C, D încât C ∈ (AB), A ∈ (BD), AB = = 12 u.m., BC = 8 u.m. şi AD = 6 u.m. Calculaţi lungimile segmentelor [AC], [CD] şi [BD].

❒**9.** a) Desenaţi un triunghi ABC, o semidreaptă [OX iar pe semidreaptă punctele M, N şi P astfel încât OM = AB, OP = AC, MN = BC şi M ∈ [ON].

b) Ajutându-vă de acest desen comparaţi AB + BC cu AC.

❒**10.** Fie o semidreaptă [OX şi pe semidreaptă punctele A, B, C astfel încât A ∈ [OB] şi B ∈ [AC]. Să se compare OC + AB cu OB + AC.

3. Unităţi de măsură pentru lungimi, transformări

Prin convenţie internaţională, unitatea principală de măsurat lungimi este metrul (m), dar se utilizează şi multiplii şi submultiplii acestuia.

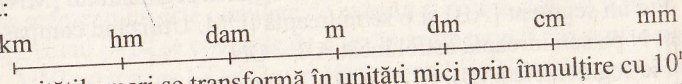
Multiplii metrului sunt: ***decametrul*** (dam), ***hectometrul*** (hm), ***kilometrul*** (km).

Submultiplii metrului sunt: ***decimetrul*** (dm), ***centimetrul*** (cm), ***milimetrul*** (mm).

1 km	1 hm	1 dam	1 m	1 dm	1 cm	1 mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Transformări

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta, utilizăm următoarea schemă:



- unitățile mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu 10^n;
- unitățile mici se transformă în unități mari prin împărțire cu 10^n,

n fiind numărul de segmente dintre cele două unități.

Exemple:

1) 24,3 dam = 24,3 · 10^3 cm = 24 300 cm.

[S-a înmulțit cu 10^3 pentru că se transformă din unități mari în unități mici și între cele două unități sunt 3 segmente.]

2) 139 729 cm = 139 729 : 10^5 km = 1,39729 km.

[S-a împărțit cu 10^5 pentru că se transformă din unități mici în unități mari și între cele două unități există 5 segmente.]

Rezultatul măsurii unei lungimi cu ajutorul metrului se exprimă printr-o fracție zecimală.

Exemplu: 24 731,1255143 m = 24 km + 7 hm + 3 dam + 1 m + 1 dm + + 2 cm + 5,5143 mm.

Lungimile se măsoară cu diverse ***instrumente de măsurat lungimi***: rigla gradată (folosită în proiectări și de școlari), metrul obișnuit (folosit în special la măsurarea pânzei), metrul tâmplarului, metrul de croitorie, ruleta, lanțul, șublerul, micrometrul etc.

Oricât de bun ar fi un instrument folosit, el măsoară cu o anumită eroare. De aceea orice măsurare presupune o aproximare.

Exerciții

❒**1.** Transformați în kilometri:
a) 200 dam; 80 000 cm; 120 000 mm; 11,2 m; 1200 hm; 534 000 dm;
b) 90 000 cm; 936 000 mm; 125 hm; 14,5 dam; 739 000 m; 1249000 dm;
c) 12 500 000 mm; 14,5 hm; 537 000 cm; 729 dam; 1350 dm; 9345,5 m.

❒**2.** Transformați în hectometri:
a) 13 km; 14,5 m; 105 000 mm; 99 dam; 600 484 cm; 1739 dm;
b) 90,45 dam; 1 700 000 cm; 362 109 mm; 25 m; 1,27 km; 500 dm;
c) 4750 m; 9,2 km; 94 mm; 537 214,5 dm; 41,2 dam; 379 824 km.

❒**3.** Transformați în decametri:
a) 50 m; 8 hm; 10,3 km; 40 000 mm; 800 cm; 750 dm;
b) 24 500 mm; 7,3 hm; 2,07 m; 0,05 km; 160 702 cm; 21 712 dm;
c) 39 m; 18,2 km; 0,6 hm; 1 570 mm; 302 dm; 5 432 937 cm.

❒**4.** Transformați în metri:
a) 12 km; 1005 mm; 4 dam; 3,5 hm; 21 dam; 137 cm;
b) 2,507 km; 250 cm; 8 hm; 10 000 000 mm; 13 dm; 13 dam;
c) 250,4 cm; 1,3 dam; 1,8 hm; 40 237 mm; 97,5 dm; 13 km.

❒**5.** Transformați în decimetri:
a) 0,4 m; 275 cm; 275 mm; 1,035 km; 12,1003 hm; 8,5 dam;
b) 0,4 dam; 1002 mm; 42 hm; 0,007 km; 582 cm; 9,2 m;
c) 275 mm; 12,4 km; 4 cm; 72 m; 0,45 hm; 15 m.

❒**6.** Transformați în centimetri:
a) 0,75 m; 0,0025 dam; 3,06 dm; 10,56 mm; 0,1055 km; 0,0075 hm;
b) 0,002 hm; 0,14 km; 225,5 mm; 3,5 dam; 0,75 dm; 0,25 m;
c) 50,5 mm; 0,005 km; 0,00055 dam; 0,85 m; 0,001 hm; 0,2 dm;

❒**7.** Transformați în milimetri:
a) 0,002 km; 15 m; 73 cm; 80 dam; 65 m; 0,15 hm;
b) 0,0321 hm; 0,4 dam; 100,2 cm; 31 m; 0,0001 km; 15 dm;
c) 1,24 m; 0,71 km; 0,45 dam; 1,2 hm; 321 dm; 955 cm.

❒**8.** Un dreptunghi are lungimea egală cu dublul lățimii și perimetrul de 0,54 dam. Calculați lungimea și lățimea dreptunghiului.

❒**9.** Un triunghi are lungimile laturilor de 3 cm, 0,0004 hm și 0,05 m. Desenați în caietul vostru un pătrat care are perimetrul egal cu cel al triunghiului.

❒**10.** Un dreptunghi are perimetrul 100 mm. Desenați dreptunghiul știind că lungimea lui este x cm unde x este cel mai mare număr natural posibil.

❒**11.** Pentru împrejmuirea unui teren având perimetrul de 875 m cu trei rânduri de sârmă, s-au cumpărat 30 role de sârmă de 0,1 km fiecare. Care este lungimea sârmei rămase?

❒**12.** O grădină în formă de pătrat cu latura de 2,75 dam este închisă cu 6 rânduri suprapuse de sârmă. Cât costă sârma știind că 1 m de sârmă costă 5500 lei?

❒**13.** Indicați unitățile de măsură convenabile pentru a măsura:
a) grosimea unui geam;
b) lungimea unui creion;
c) lungimea sălii de clasă;
d) lungimea unui teren agricol;
e) distanța între două orașe.

❒14. Estimați următoarele lungimi în centimetri, apoi verificați prin măsurare estimările făcute:
a) lățimea și lungimea caietului de matematică;
b) lungimea unui creion.

❒15. Un camion trebuie să transporte marfă pe drumurile indicate în figura E. 16, de la un depozit aflat în D la orașele A, B, C, E și să se întoarcă în D. Ce itinerar trebuie să urmeze pentru ca drumul să fie cel mai scurt, știind că: AB = AD = 30 km; BC = AC = CD = 40 km și AE = 10 km.

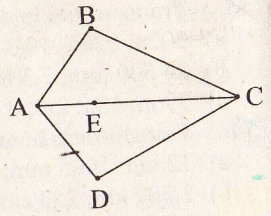


Fig. E. 16

4. Măsurarea unghiurilor

Unitatea de măsură a unghiurilor este ***gradul*** (°). Numărul de grade al unui unghi se numește ***măsura unghiului***.

Instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară unghiul este ***raportorul***.

Raportorul are numerele întregi de la 0 la 180 așezate uniform ca în figura 18. Unghiul ∢AOB din figura 18 are 45° (citim „45 grade").

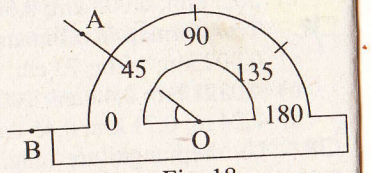


Fig. 18

Vom scrie m(∢AOB) = 45°. Citim: „măsura unghiului AOB este de 45 grade".

Submultiplii gradului sunt: ***minutul*** (′) și ***secunda*** (″). 1° = 60′; 1′ = 60″.

Unghiul drept are măsura de 90°. Un unghi care are măsura mai mică de 90° se numește ***unghi ascuțit***, iar un unghi cu măsura mai mare de 90° se numește ***unghi obtuz*** (fig. 19).

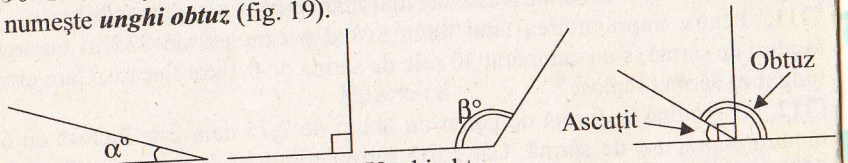


Fig. 19

Fiind numere măsurile unghiurilor se pot aduna (scădea). Există o situație geometrică care conduce la adunare (scăderea) măsurilor de unghiuri (fig. 20).

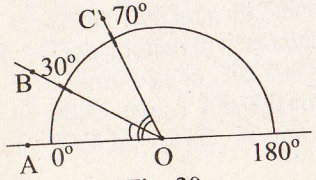


Fig. 20

Deoarece m(∢AOC) = 70° și m(∢AOB) = 30° rezultă:
m(∢BOC) = m(∢AOC) – m(∢AOB) adică m(∢BOC) = 70° – 30° = 40°.

De asemenea rezultă egalitatea m(∢AOC) = m(∢AOB) + m(∢BOC).

Exerciții

❒1. Utilizând figura E. 17,
a) să se precizeze: m(∢APB); m(∢APC); m(∢APD); m(∢APH); m(∢APF); m(∢APE); m(∢APG);
b) să se calculeze: m(∢CPE); m(∢CPF); m(∢FPH).
c) Numiți două unghiuri ascuțite și două unghiuri obtuze.

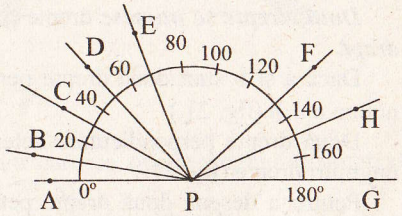


Fig. E. 17

❒2. Se consideră unghiurile: ∢A, ∢B, ∢C, ∢D și ∢E (fig. E. 18). Estimați care unghiuri sunt ascuțite, care drepte și care obtuze.

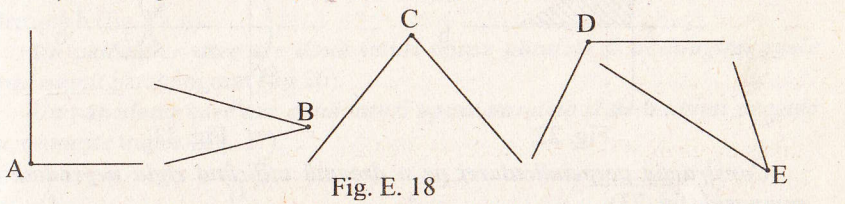


Fig. E. 18

❒3. Desenați două unghiuri ∢AOB și ∢BOC astfel încât O ∈ [AC]. Justificați (fără a folosi raportorul!) că este adevărată următoarea propoziție: „dacă unul din unghiuri este ascuțit celălalt este obtuz".

❒4. Desenați un pătrat ABCD. Măsurați cu raportorul ∢BAC.

❒5. Desenați un segment [AB]. Dați compasului deschiderea AB și cu centrul în A respectiv în B desenați două cercuri care se intersectează în C respectiv în D. Măsurați unghiurile triunghiului ABC și ∢ACD.

❒6. Transformați în minute și apoi în secunde:
a) 3,5°; b) 1,2°; c) 1,02°;
d) 1,6°; e) 80,10°; f) 90,5°.

Indicație: a) 3,5° = (3,5 · 60)′ = 210′ = (210 · 60)″ = 12 600″.

❒7. De două ori măsura unui unghi este cu 30° mai mică decât de trei ori măsura unui unghi de 35°. Care este măsura unghiului?

❒8. Folosind raportorul desenați un unghi ∢MNP cu măsura de 96° și un unghi ∢QRS cu măsura de 15°.

❒9. Desenați o semidreaptă [OX și unghiurile care au una din laturi semidreapta [OX și măsura de 30°.

❒10. Desenați trei unghiuri așa încât al treilea să aibă măsura egală cu suma măsurilor celor două unghiuri.

5. Drepte perpendiculare. Drepte paralele

Două drepte se numesc drepte perpendiculare ***dacă determină un unghi drept.***

Dacă a și b sunt două drepte perpendiculare notăm $a \perp b$ (fig. 21.)

Două drepte perpendiculare determină patru unghiuri drepte (fig. 21.)

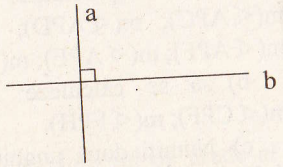


Fig. 21.

Pentru a desena două drepte perpendiculare utilizăm ***echerul*** (fig. 22) sau ***rigla negradată și compasul.***

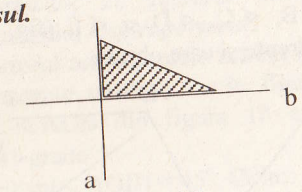


Fig. 22.

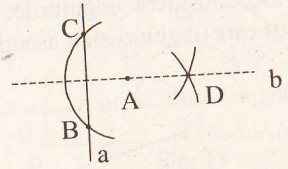


Fig. 23.

Construcția perpendicularei pe o dreaptă utilizând rigla negradată și compasul (fig. 23)

Problemă. Se dă o dreaptă a și un punct A. Să se deseneze – utilizând rigla negradată și compasul – dreapta b căreia să-i aparțină punctul A și care să fie perpendiculară pe a.

Rezolvare. Un cerc $\mathcal{C}(A; r)$ intersectează dreapta a în punctele B și C. Cu o rază $R > r$ și cu centrul în B respectiv în C se desenează cercuri care se intersectează în D. Dreapta AD este dreapta b căutată. Verificați utilizând echerul.

Două drepte se numesc drepte paralele ***dacă nu au nici un punct comun.***

Dacă a și b sunt două drepte paralele notăm $a \parallel b$ (fig. 24).

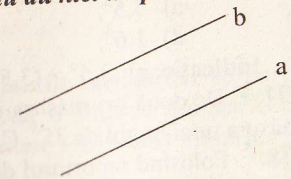


Fig. 24

Un mijloc foarte practic pentru a desena două drepte paralele se bazează pe utilizarea riglei și a echerului (fig. 25).

Problemă. Se dă o dreaptă a și un punct P care să nu aparțină dreptei. Să se construiască o

dreaptă b căreia să-i aparțină punctul P și să fie paralelă cu a.

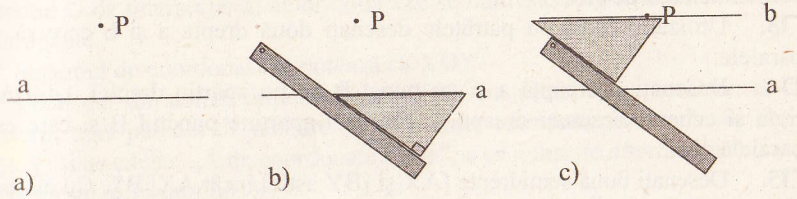


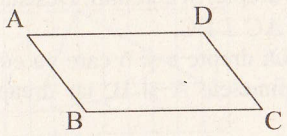
Fig. 25

Rezolvare. (fig. 25)

- plasăm echerul astfel încât latura care se opune unghiului drept să coincidă cu un segment al dreptei a (fig. 25. b);
- așezăm o riglă lipită de o latură a echerului alăturată unghiului drept (fig. 25. b);
- facem echerul să alunece de-a lungul riglei, care rămâne fixă, până când latura care se opune unghiului drept trece prin punctul P și trasăm dreapta b (fig 25. c).

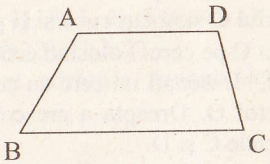
Un patrulater care are două laturi opuse paralele și de lungimi egale este numit paralelogram (fig 26).

Un patrulater care are două laturi opuse paralele și de lungimi neegale se numește trapez (fig. 27).



ABCD este paralelogram deoarece $AD \parallel BC$ și $AD = BC$

Fig. 26



ABCD este trapez deoarece $AD \parallel BC$ și $AD \neq BC$

Fig. 27

(Verificarea egalității sau inegalității lungimii laturilor [AD] și [BC] se poate face cu compasul.)

Exerciții

❒1. Desenați o dreaptă d și un punct A ce nu aparține dreptei. Utilizând echerul, desenați perpendiculara din A pe d.

❒2. Se dă o dreaptă a şi un punct B. Utilizând rigla negradată şi compasul, să se deseneze o dreaptă b căreia să-i aparţină punctul B şi care să fie perpendiculară pe a.

❒3. Utilizând foaia cu pătrăţele desenaţi două drepte a şi b care să fie paralele.

❒4. Desenaţi o dreaptă a şi un punct B ce nu aparţin dreptei. Utilizând rigla şi echerul desenaţi dreapta b căreia îi aparţine punctul B şi care este paralelă cu a.

❒5. Desenaţi două semidrepte [AX şi [BY astfel încât AX∥BY. Cu ajutorul compasului desenaţi punctele D şi C, D ∈ [AX şi C ∈ [BY astfel încât AD = = BC. Ce este patrulaterul ABCD?

❒6. Desenaţi două semidrepte [AX şi [BY astfel încât AX∥BY. Desenaţi punctele D şi C, D ∈ [AX , C ∈ [BY astfel încât AD ≠ BC. Ce este patrulaterul ABCD?

❒7. Desenaţi două cecuri de aceeaşi rază şi care să aibă două puncte comune A şi B. Notaţi cu O şi Q centrele celor două cercuri.

a) Justificaţi egalitatea lungimilor laturilor patrulaterului AOBQ.
b) Ce este patrulaterul AOBQ?
c) Verificaţi cu ajutorul echerului că AB ⊥ OQ.

❒8. Desenaţi două cercuri de raze diferite şi care să aibă două puncte comune A şi B. Notaţi cu O şi Q centrele celor două cercuri. Verificaţi cu echerul că AB ⊥ OQ.

❒9. Desenaţi un cerc cu centrul în O, apoi o dreaptă căreia îi aparţine punctul O şi notaţi cu A şi B punctele comune dreptei şi cercului. Desenaţi un punct C pe cerc. Folosind echerul verificaţi că AC ⊥ BC.

❒10. Desenaţi un cerc cu centrul în O şi două drepte a şi b care au comun punctul O. Dreapta a are comun cu cercul punctele A şi B, iar dreapta b punctele C şi D.

a) Verificaţi cu rigla şi echerul că AD∥BC, iar AC∥BD.
b) Completaţi: A, B, C, D sunt vârfurile unui patrulater care este un .....

6*. Localizarea în plan a unui punct de coordonate întregi

Axa numerelor este o dreaptă pe care am fixat un punct O numit ***origine***, un ***sens pozitiv*** şi am ales ca ***unitate de măsură*** un segment [OI].

Axa numerelor ne permite să reprezentăm numerele studiate (naturale, întregi şi raţionale).

Se numeşte ***sistem de coordonate în plan*** o pereche (OX, OY) de axe perpendiculare.

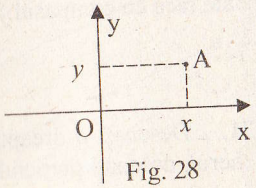


Fig. 28

Axa orizontală OX se numeşte ***axa absciselor***.
Axa verticală OY se numeşte ***axa ordonatelor***.
Punctul O de intersecţie al celor două axe se numeşte ***originea*** sistemului de coordonate.

Sistemul de coordonate se notează cu XOY.

Fiind dat un sistem de coordonate XOY un punct A se localizează cu ajutorul unei perechi de numere (x, y) numite ***coordonatele*** lui A. Se scrie $A(x, y)$ şi se citeşte „A de coordonate x şi y"; x se numeşte ***abscisa*** lui A, iar y se numeşte ***ordonata*** lui A.

Exemplu: Folosind reţeaua cu pătrăţele a foii de matematică, să se deseneze un sistem de coordonate XOY şi în acest sistem de coordonate să se reprezinte punctul A care are coordonatele 3 şi 2 (abscisa 3 şi ordonata 2).

Rezolvarea o reprezintă figura 29. Notăm A(3, 2).

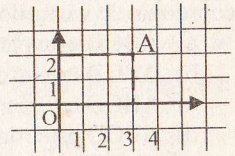


Fig. 29

Exerciţii

❒1. Desenaţi un sistem de coordonate XOY şi punctele A(1, 2); B(2, 4); C(3, 6), D(4, 5).

❒2. Desenaţi un sistem de coordonate şi triunghiul determinat de punctele A(4, 1); B(2, 3); C(1, 6).

❒3.

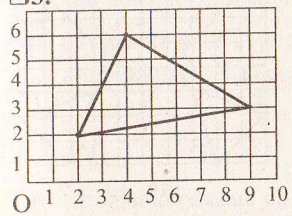


Fig. E. 18

Fie punctele A(2, 3), B(4, 6), C(6, 4), D(3, 9), E(9, 3), F(2, 2), G(1, 3), H(3, 7).
Care din ele sunt vârfurile triunghiului din figura E. 18?

❒4. Desenaţi un sistem de coordonate şi punctele A(2, 2), B(2, 4), C(4, 2), D(6, 4), E(6, 2). Linia frântă ABCDE reprezintă o literă. Care este aceasta?

❒5. Desenaţi un sistem de coordonate şi punctele A(1, 1), B(1, 4), C(4, 1), D(4, 4). Ce este patrulaterul ABDC?

❒6. Desenaţi un sistem de coordonate şi punctele M(3, 2), N(8, 2), P(8, 4), Q(3, 4). Ce este patrulaterul MNPQ?

❒7. Desenaţi un sistem de coordonate şi punctele E(2, 4), F(8, 7), G(6, 4), H(4, 7). Ce este patrulaterul EHFG?

❒**8.** Desenați un sistem de coordonate și punctele P(2, 2), Q(7, 2), R(9, 4), S(4, 4). Ce este patrulaterul PQRS?

❒**9.** Desenați un sistem de coordonate și punctele M(2, 2), N(6, 2), L(8, 5), S(4, 5). Ce este patrulaterul MNLS?

❒**10.** Desenați un sistem de coordonate, punctele A(1, 2), B(3, 4), C(4, 2), D(7, 5) și dreptele AB și CD. Utilizând rigla și echerul verificați că AB∥CD.

❒**11.** Desenați un sistem de coordonate, punctele A(1, 2), B(5, 6), C(1, 6), D(4, 3) și dreptele AB și CD. Utilizând echerul verificați că AB ⊥ CD.

❒**12.** Desenați un sistem de coordonate și un patrulater ABCD. Precizați coordonatele vârfurilor patrulaterului știind că:

a) ABCD este pătrat;
b) ABCD este dreptunghi;
c) ABCD este paralelogram;
d) ABCD este romb;
e) ABCD este trapez.

7. Simetria și translația (Construirea de figuri folosind simetria și translația)

Simetria

În figura 30, d ⊥ AA′ și d determină pe [AA′], segmentele [A′O] și [OA] de lungimi egale (OA = = OA′). Se spune că A și A′ sunt simetrice față de dreapta AA′. Deci:

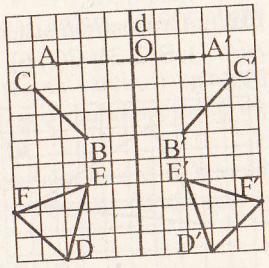


Fig. 30

Două puncte A și A′ sunt simetrice față de o dreaptă d dacă dreapta d este perpendiculară pe dreapta AA′ și dreapta d determină pe segmentul [AA′] două segmente de lungimi egale.

Într-un limbaj mai accesibil, dar mai puțin riguros.

Două puncte A și A′ sunt simetrice față de dreapta d dacă prin pliere după dreapta d punctele A și A′ coincid.

În figura 30 punctele A și A′, segmentele [BC] și [B′C′], triunghiurile DEF și D′E′F′ sunt simetrice față de dreapta d.

Două figuri F și F′ sunt simetrice față de o dreaptă d dacă prin pliere după dreapta d figurile F și F′ coincid.

Mai precis,

Două figuri F și F′ sunt simetrice față de o dreaptă d dacă orice punct al figuri F are ca simetric față de dreapta d un punct pe figura F′ și invers.

Dreapta d se numește axa de simetrie.

Folosind rețeaua de pătrățele a foii de matematică putem desena figuri simetrice. Avem grijă ca, de fiecare dată când luăm un punct de o parte a axei, să luăm alt punct situat de cealaltă parte a axei, așezat simetric.

Translația

Un segment [AB] pe care alegem un sens de parcurs se numește ***vector***. Dacă sensul de parcurs este de la A spre B, vectorul se notează cu $\overrightarrow{AB}$ și se reprezintă ca în figura 31.

Fig. 31

Translația unei figuri după un vector dat $\overrightarrow{AB}$ se obține deplasând fiecare punct al figurii pe o dreaptă paralelă cu dreapta AB, în sensul indicat de vectorul $\overrightarrow{AB}$ și pe o distanță egală cu lungimea segmentului [AB].

Exemplu: Fie un vector $\overrightarrow{AB}$ și un triunghi MNP (fig. 32). Translația triunghiului MNP după vectorul $\overrightarrow{AB}$ este triunghiul M′N′P′ care se desenează astfel:

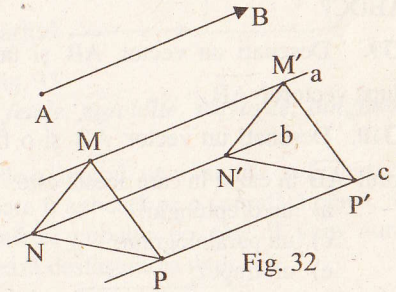


Fig. 32

– se desenează dreapta a căreia îi aparține punctul M și care este paralelă cu dreapta AB;

– în sensul indicat de vectorul $\overrightarrow{AB}$, pe dreapta a, se ia punctul M′ astfel încât MM′ = AB;

– asemănător se desenează punctele N′ și P′.

Exerciții

❒**1.** Folosind rețeaua cu pătrățele a foii de matematică desenați o dreaptă d (verticală sau orizontală) figura F și simetrica acesteia față de d știind că figura F este:

a) un punct;
b) un segment;
c) un triunghi;
d) un pătrat;
e) un cerc;
f) un dreptunghi;
g) un paralelogram;
h) un romb;
i) un trapez;
j) un patrulater oarecare.

❒**2.** Folosind rețeaua cu pătrățele a foii de matematică desenați o dreaptă d verticală și trei puncte A, B, C astfel încât A ∈ d, B ∈ d și C ∉ d. Desenați

punctul C′ simetricul lui C față de d. Punând în evidență patrulaterul ACBC′, dreapta AB este axa de simetrie a patrulaterului.

❒3. Desenați un segment și axa lui de simetrie.

❒4. Desenați un romb și cele două axe de simetrie ale rombului.

❒5. Desenați un dreptunghi și cele două axe de simetrie ale dreptunghiului.

❒6. Desenați un pătrat și cele patru axe de simetrie ale pătratului.

❒7. Desenați un cerc și o axă de simterie a lui. Câte axe de simetrie are un cerc?

❒8. Folosind rețeaua cu pătrățele a foii de matematică desenați un vector $\overrightarrow{AB}$, orizontal, de lungime 3 cm și un punct C astfel încât $C \notin AB$. Translatând punctul C după vectorul $\overrightarrow{AB}$ obținem un punct D. Ce este patrulaterul ABDC?

❒9. Desenați un vector $\overrightarrow{AB}$ și un triunghi MNP. Translatați triunghiul după vectorul $\overrightarrow{AB}$.

❒10. Desenați un vector $\overrightarrow{AB}$ și o figură F. Translatați figura F după vectorul $\overrightarrow{AB}$ în cazul în care acesta este:

a) un dreptunghi; b) un pătrat;
c) un paralelogram; d) un romb;
e) un trapez; f) un patrulater oarecare.

Lucrare practică

- Desenați pe o foaie de matematică un vector $\overrightarrow{AB}$.
- Desenați sub vector un patrulater oarecare ABCD.
- Translatați patrulaterul ABCD după vectorul $\overrightarrow{AB}$. (Obțineți în acest fel un patrulater A′B′C′D′.)
- Cu ajutorul unei foarfece decupați cele două patrulatere.
- Suprapuneți cele două patrulatere.

Ce constatați?

Notă. Repetați lucrarea de mai sus considerând în locul patrulaterului ABCD alte figuri geometrice (triunghi, dreptunghi, paralelogram etc.)

8. Corpuri geometrice
(descriere; evidențierea elementelor: vârfuri, muchii, fețe)

Paralelipipedul dreptunghic și cubul

Paralelipipedul dreptunghic este un corp mărginit de șase fețe dreptunghiulare.

Cubul este un paralelipiped dreptunghic ale cărui fețe sunt pătrate.

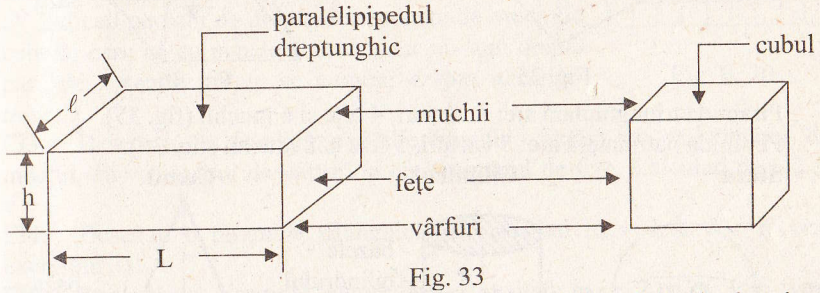


Fig. 33

Elemetele unui paralelipiped sunt: ***fețele***, ***muchiile***, ***vârfurile***, ***lungimea*** (L), ***lățimea*** (ℓ), ***înălțimea*** (h).

Dacă se taie suprafața unui cub de-a lungul unui număr suficient de muchii, întreaga suprafață a cubului poate fi aplicată pe o suprafață plană. Se obține astfel un model plan al suprafeței cubului pe care îl vom numi ***desfășurarea cubului***. Figura 34 ilustrează desfășurarea unui cub.

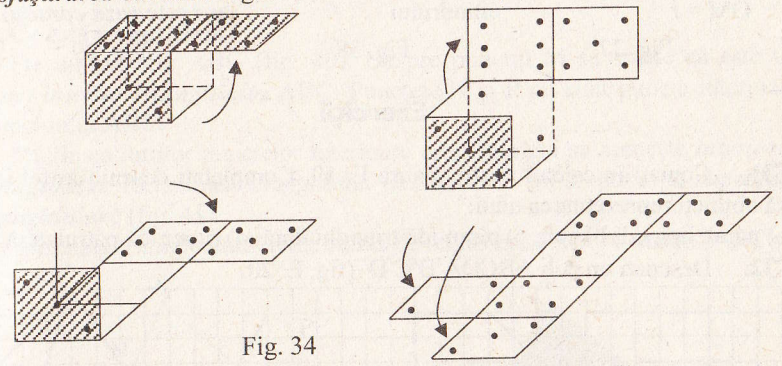


Fig. 34

Deci figura 34 observată de la stânga spre dreapta (→) ilustrează cum se desfășoară un cub. Aceeași figură observată de la dreapta spre stânga (←) ilustrează cum se construiește un cub. La fel se procedează și în cazul paralelipipedului.

Piramida triunghiulară

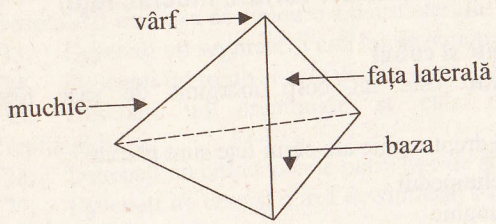


Fig. 35

Piramida patrulateră

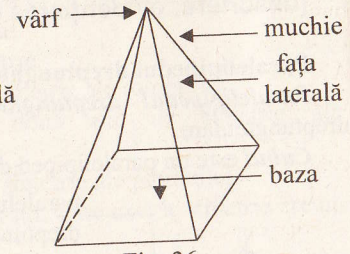
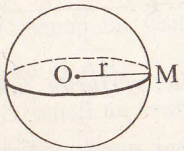


Fig. 36

Piramida triunghiulară are: 4 vârfuri, 4 fețe și 6 muchii (fig. 35).
Piramida patrulateră are: 5 vârfuri, 5 fețe și 8 muchii (fig. 36).

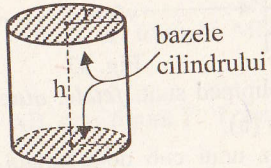
Sfera



O este ***centrul*** sferei;
r este ***raza*** sferei
OM = r

Fig. 37

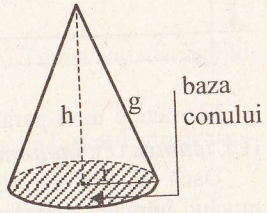
Cilindrul



h este ***înălțimea,***
iar r este ***raza***
cilindrului

Fig. 38

Conul



g este ***generatoarea***
h este ***înălțimea,***
iar r este ***raza conului***

Fig. 39

Exerciții

❒**1.** Copiați în caietul vostru figura E. 19. Completați desenul astfel încât să obțineți reprezentarea unui:
a) paralelipiped; b) cub; c) piramidă triunghiulară; d) piramidă patrulateră.

❒**2.** Desenați un cub ABCDA′B′C′D′ (fig. E. 20)

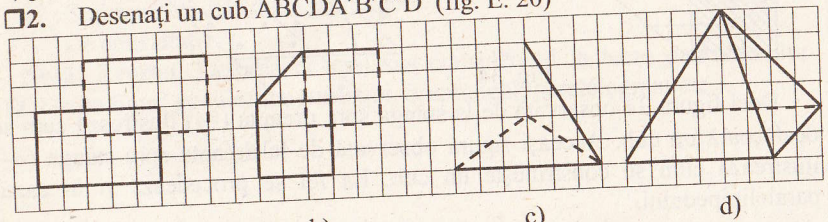


Fig. E. 19

a) Care sunt muchiile cubului cărora le aparține punctul A?
b) Care sunt fețele cubului cărora le aparține punctul A?
c) Care sunt fețele cubului care conțin muchia [AB]?
d) Indicați perechi de drepte determinate de muchiile cubului care sunt drepte paralele.
e) Indicați perechi de drepte determinate de muchiile cubului care nu au puncte comune, dar nu sunt drepte paralele. (Aceste drepte se numesc ***drepte necoplanare***).

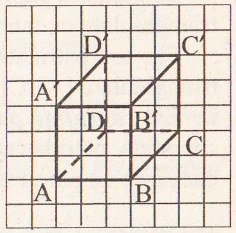


Fig. E. 20

❒**3.** Desenați un paralelipiped dreptunghic. Notăm cu m numărul de muchii, cu v numărul de vârfuri și cu f numărul de fețe. Calculați m + 2 și v + f.

❒**4.** Desenați o piramidă triunghiulară. Calculați m + 2 și v + f (vezi exercițiul 3).

❒**5.** Desenați o piramidă patrulateră. Calculați m + 2 și v + f (vezi exercițiul 3).

❒**6.** Desenați: a) o sferă; b) un cilindru; c) un con. Numiți elementele acestor corpuri.

9. Unități de măsură pentru suprafețe; transformări

Ce este o suprafață?

Fie un triunghi ABC (fig. 40). Despre punctul M se spune că este un ***punct interior triunghiului*** ABC. Punctele N și P nu sunt puncte interioare triunghiului ABC.

Mulțimea tuturor punctelor interioare unui triunghi se numește ***interiorul triunghiului***. Reuniunea triunghiului cu interiorul lui se numește ***suprafață triunghiulară*** (fig. 41).

Suprafața triunghiulară determinată de un triunghi ABC o notăm [ABC].

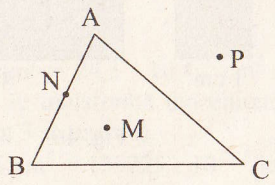


Fig. 40

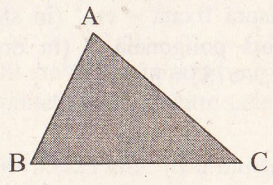


Fig. 41

Se numește ***suprafață poligonală*** reuniunea unui număr finit de suprafețe triunghiulare cu interioarele disjuncte două câte două.

Fie un patrulater convex ABCD. Considerând reuniunea suprafețelor triunghiulare [ABC] și [ACD] obținem o suprafață poligonală notată [ABCD] numită ***suprafață patrulateră*** (fig. 42). Dacă patrulaterul este un dreptunghi, suprafața patrulateră se numește ***suprafață dreptunghiulară*** (fig. 43), iar dacă este un pătrat se numește ***suprafață pătrată*** (fig. 44).

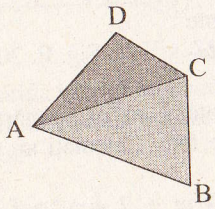


Fig. 42

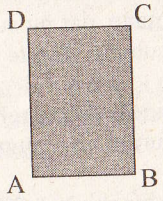


Fig. 43

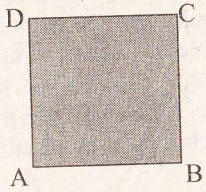


Fig. 44

Ce este aria unei suprafețe?

Pentru a fi comparate, suprafețele se măsoară. Unitatea de măsură pentru suprafețe rezultă din unitatea de măsură pentru lungimi. Dacă, de exemplu, lungimea se măsoară în centimetri, suprafața se va măsura în centimetri pătrați și așa mai departe. Figura 45 ilustrează o unitate de măsură pentru lungimi și unitatea corespunzătoare pentru suprafețe.

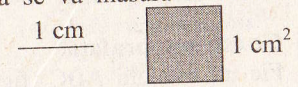


Fig. 45

Folosind unitatea de măsură, fiecărei suprafețe i se asociază un număr pozitiv unic, care arată câte unități de măsură are suprafața respectivă. Acest număr se numește ***aria suprafeței***.

Dacă S este o suprafață, atunci aria ei se notează cu $\mathcal{A}(S)$.

Exemplu. Figura 46 ilustrează unitatea de măsură fixată – cm^2 (în stânga) și o suprafață poligonală S (în dreapta). Se vede că $\mathcal{A}(S) = 3\ cm^2$.

Fig. 46

Suprafețe echivalente

Două suprafețe cu ariile egale se numesc *suprafețe echivalente.*

Unități de măsură pentru suprafețe

Unitatea principală pentru măsurat suprafețe este *metrul pătrat* (m^2) dar se utilizează și multiplii și submultimplii acestuia.

Multiplii *metrului pătrat* sunt: ***decametrul pătrat*** (dam^2), ***hectometrul pătrat*** (hm^2) și ***kilometrul pătrat*** (km^2).

Submultimplii *metrului pătrat* sunt: ***decimetrul pătrat*** (dm^2), ***centimetrul pătrat*** (cm^2) și ***milimetrul pătrat*** (mm^2).

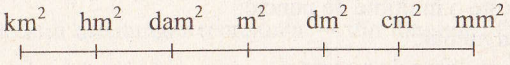
$1\ km^2$	$1\ hm^2$	$1\ dam^2$	$1\ m^2$	$1\ dm^2$	$1\ cm^2$	$1\ mm^2$
$1000^2\ m^2$	$100^2\ m^2$	$10^2\ m^2$	$1\ m^2$	$\frac{1}{10^2}\ m^2$	$\frac{1}{100^2}\ m^2$	$\frac{1}{1000^2}\ m^2$

Alte unități de măsură pentru suprafețe sunt ***hectarul*** *(ha)* și ***arul*** *(ar)*:

$1\ ha = 100^2\ m^2$; $1\ ar = 10^2\ m^2$;
$1\ ha = 1\ hm^2$; $1\ ar = 1\ dam^2$.

Transformări

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta, utilizăm următoarea schemă:



- unitățile mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu 10^{2n};
- unitățile mici se transformă în unități mari prin împărțire cu 10^{2n}.

(*n* este numărul de segmente dintre cele două unități)

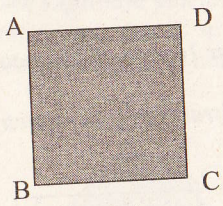
Exemple:

1) $24{,}3\ dam^2 = 24{,}3 \cdot 10^{2 \cdot 3}\ cm^2 = 24300000\ cm^2$. (S-a înmulțit cu $10^{2 \cdot 3}$ pentru că se transformă din unitate mare în unitate mică și între cele două unități sunt 3 segmente)

2) $139725\ cm^2 = 139725 : 10^{2 \cdot 5}\ km^2 = 0{,}0000139725\ km^2$. (S-a împărțit cu $10^{2 \cdot 5}$ pentru că se transformă din unitate mică în unitate mare și între cele două unități există 5 segmente)

Calculul ariilor unor suprafețe

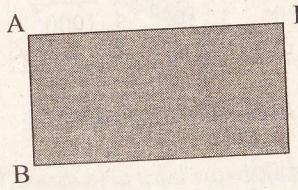
În continuare vom spune pe scurt "aria pătratului", "aria dreptunghiului" și vom subînțelege că este vorba de aria suprafeței corespunzătoare.



ABCD pătrat

$A[ABCD] = AB^2$

Aria unui pătrat este pătratul lungimii laturii sale.



ABCD dreptunghi

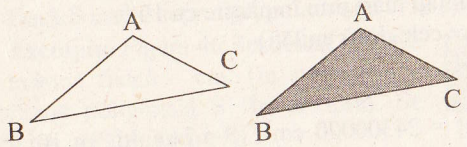
$A[ABCD] = AB \cdot BC$

Aria unui dreptunghi este produsul lungimilor a două laturi alăturate.

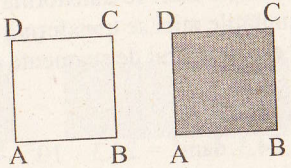
Exerciții

❒1. Care propoziții sunt adevărate:
- **a)** suprafața este un număr;
- **b)** suprafața este o mulțime de puncte;
- **c)** aria este un număr;
- **d)** aria este o mulțime de puncte.

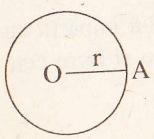
❒2. Desenați în caietul vostru:



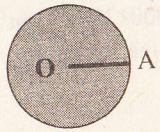
a)

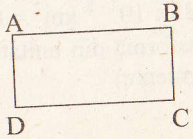


b)

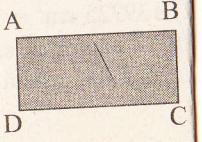


c)





d)



Scrieți în caiet:

Figurile desenate reprezintă:
- **a)** un triunghi ABC și suprafața triunghiulară [ABC];
- **b)** un pătrat ABCD și suprafața pătrată [ABCD];
- **c)** un cerc C(O, r) și o suprafață numită ***disc de centru O și raza r,*** notată [C(O, r)];
- **d)** un dreptunghi ABCD și o suprafață dreptunghiulară [ABCD].

❒3. Care exprimare este cea corectă:
- **a)** aria pătratului ABCD; **b)** aria suprafeței pătrate [ABCD];
- **c)** aria cercului C(O, r); **d)** aria discului C(O, r).

❒4. Care exprimare este cea uzuală:
- **a)** aria pătratului ABCD; **b)** aria suprafeței pătrate [ABCD];
- **c)** aria cercului C(O, r); **d)** aria discului [C(O, r)].

❒5. Un pătrat ABCD are latura de lungime egală cu media aritmetică a numerelor 45 și 75. Calculați:
- **a)** perimetrul pătratului;
- **b)** aria pătratului.

❒6. Un pătrat are aria de 625 m^2. Aflați perimetrul pătratului.

❒7. Câți centimetri are lungimea laturii unui pătrat cu aria între 36 cm^2 și 64 cm^2 dacă lungimea laturii are un număr întreg de centimetri.

❒8. Lungimea laturii [AB] a unui pătrat ABCD se mărește cu un segment având lungimea de 3 cm, iar latura [BC] se mărește cu un segment având lungimea de 2 cm. Se obține astfel un dreptunghi. Să se determine lungimea laturii pătratului dacă aria s-a micșorat cu 24 cm^2.

❒9. Lățimea unui dreptunghi reprezintă $\frac{1}{3}$ din lungime. Triplul diferenței dintre lungime și lățime este cu 20 m mai mic decât perimetrul dreptunghiului.
- a) Calculați lungimea și lățimea dreptunghiului.
- b) Calculați aria dreptunghiului și aria pătratului cu lungimea laturii egală cu perimetrul dreptunghiului.

❒10. Aflați aria unui dreptunghi cu perimetrul 2730 cm și lățimea cât $\frac{1}{3}$ din dublul lungimii.

❒11. Un pătrat are perimetrul între 144 m și 153 m. Lungimea laturii pătratului este x metri, unde x este un număr natural.
- a) Să se determine x.
- b) Să se determine latura pătratului cu arie minimă.

12. Un teren de joacă are forma dreptunghiulară cu lățimea egală cu $\frac{1}{8}$ din perimetru, iar diferența dintre lungime și lățime este 30 cm. Ce arie are suprafața terenului?

13. Pardoseala unei camere se acoperă cu plăcuțe de gresie pătratice cu latura de 1 dm. Suprafața pardoselei măsoară 1200 dm^2. Dacă plăcile se vând în cutii de câte 50 de bucăți, iar 1 m^2 de gresie costă 65560 lei, să se afle câte cutii sunt necesare pentru a acoperii pardoseala și cât costă gresia folosită?

14. Transformați în m^2:
72845,80 dm^2; 7,352492 dam^2;
9327580 cm^2; 0,05294590 hm^2.

15. Transformați în cm^2: 0,005 m^2; 0,003 dam^2.

16. Transformați în mm^2: 0,36 dm^2; 130075 cm^2.

17. Transformați în m^2: 26,5 dam^2; 32658 dm^2; 15625 cm^2.

18. Transformați în hectare: 1426 ari; 850000 m^2.

19. 14008,2 m^2 = ? dm^2 = ? dam^2 = ? hm^2 = ? ha.

20. 281,004 dam^2 = ? m^2 = ? dm^2 = ? cm^2 = ? ari.

21. Calculați:
a) în m^2: 24 dam^2 + 36,25 hm^2 + 275 m^2;
92,30 m^2 + 276.325 cm^2 + 48 dm^2;
326,25 dam^2 – 0,72 hm^2;
2,75 m^2 – 32,25 dm^2.
b) în cm^2: 7,45 m^2 – 4,52 dm^2 + 72,5 cm^2.
12,5 dm^2 – 0,0135 m^2 + 0,01201 dam^2;
37,01 m^2 – 21,57 dm^2 – 1234 mm^2;
12456 mm^2 + 0,123 m^2 + 172 dm^2.

22. Completați:
a) 2,5 m^2 + ... = 1 dam^2;
b) 48 dm^2 + ... = 1 m^2;
c) 27 dam^2 + ... = 1 hm^2;
d) 625 cm^2 + ... = 1 m^2;
e) 318 m^2 + 277 m^2 + ... = 1 hm^2;
f) 21 dm^2 + 450 cm^2 + ... = 1 m^2.

23. În figura E este reprezentată o grădină în care se află două alei. Grădina este acoperită cu gazon și are lungimea de 200 m, lățimea de 80 m, iar lățimea aleilor e de 80 cm. Să se calculeze aria gazonului în două moduri.

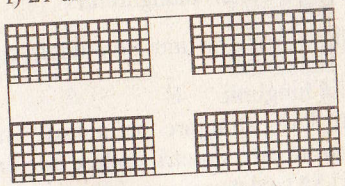


Fig. E

24. Un apartament are trei camere cu suprafețele de 12 m^2; 13,5 m^2 și 8 m^2. Cât costă mochetarea celor trei camere, știind că 1 m^2 de mochetă costă 116.000 lei?

25. O baie are lungimea de 3,5 m și lățimea de 2,5 m. De câte plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 25 cm este nevoie pentru a acoperi podeaua?

26. Pentru un pavaj se folosesc plăci de mozaic cu suprafața de 120 cm^2, așezate în 42 rânduri a câte 12 plăci fiecare. Aflați aria suprafeței pavate.

27. Un dreptunghi are lățimea de 23 cm. Să se calculeze lungimea sa știind că dacă aceasta se mărește de două ori, iar lățimea se mărește cu 2 atunci aria dreptunghiului se mărește cu 1215 m^2.

10. Unități de măsură pentru volum, transformări

Ce este volumul unui corp?

Fie un cub cu lungimea muchiei de o unitate de măsură. Numărul care arată din câte astfel de cuburi se compune un corp se numește ***volumul corpului***, iar cubul respectiv se numește ***unitate de măsură pentru volumul corpurilor***.

Dacă, de exemplu, cubul ales ca unitate de măsură pentru volumul corpurilor are lungimea muchiei de 1 cm, vom spune că el are volumul de 1 cm^3 (un centimetru cub). Deci unitatea de măsură pentru volumul corpurilor rezultă din unitatea de măsură pentru lungimi.

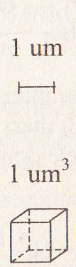


Fig. 47

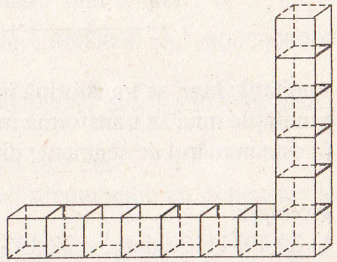


Fig. 48

Exemplu: Figura 47 ilustrează o unitate de măsură pentru lungimi și unitatea de măsură corespunzătoare pentru volum (un cub cu muchia de 1 um). Volumul acestui cub este de 1 um^3, iar volumul corpului din figura 48 este V(C) = 13 um^3.

Unități de măsură pentru volum

Unitatea principală pentru măsurat volume este ***metrul cub*** (m^3).

Metrul cub este volumul unui cub cu muchia de 1 m.

Multiplii *metrului cub* sunt: ***kilometrul*** cub (km^3), ***hectometrul cub*** (hm^3) și ***decametrul cub*** (dam^3).

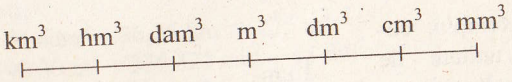
Submultiplii *metrului cub* sunt: decimetrul cub (dm^3), centimetrul cub (cm^3) și ***milimetrul cub*** (mm^3).

$1\ km^3$	$1\ hm^3$	$1\ dam^3$	$1\ m^3$	$1\ dm^3$	$1\ cm^3$	$1\ mm^3$
$1000^3\ m^3$	$100^3\ m^3$	$10^3\ m^3$	$1\ m^3$	$\frac{1}{10^3}\ m^3$	$\frac{1}{100^3}\ m^3$	$\frac{1}{1000^3}\ m^3$

Multiplii metrului cub se utilizează foarte rar în viața practică.

Transformări

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta, utilizăm următoarea schemă:



- unitățile mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu 10^{3n};
- unitățile mici se transformă în unități mari prin împărțire cu 10^{3n}.

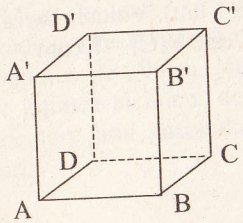
(n este numărul de segmente dintre cele două unități)

Exemple:

1) $29{,}49311172\ dam^3 = 29{,}49311172 \cdot 10^{3 \cdot 2}\ dm^3 = 29493111{,}72\ dm^3$.

2) $10000000\ mm^3 = 10000000 : 10^{3 \cdot 4}\ dam^3 = 0{,}00001\ dam^3$.

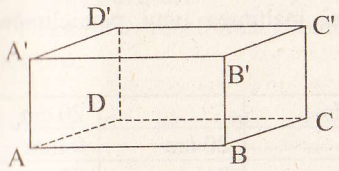
Calculul volumelor unor corpuri



ABCDA'B'C'D' cub

$V_{cub} = AB^3$

Volumul unui cub este cubul lungimii muchiei acestuia.



ABCDA'B'C'D' paralelipiped dreptunghic

Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul dintre lungime, lățime și înălțime (exprimate în aceeași unitate de măsură).

Exerciții

❒**1.** Transformați în mm^3: 40 cm^3; 7 m^3; 0,0000933 hm^3; 80 dm^3; 0,0000000023 km^3; 0,42 dam^3.

❒**2.** Transformați în cm^3: 0,000000000000008 km^3; 3145 mm^3; 0,0000000694 km^3; 40,2 dm^3; 0,42 dam^3; 51,82 m^3.

❒**3.** Transformați în dm^3: 0,09 hm^3; 35 m^3; 304,5 cm^3; 0,00637 km^3; 14000 mm^3; 0,00054 dam^3.

❒**4.** Transformați în m^3: 18 km^3; 0,000415 dam^3; 1476000 mm^3; 0,005 km^3; 3250 dm^3; 4500 cm^3.

❒**5.** Transformați în dam^3: 3,5 m^3; 0,0073 hm^3; 3425000000 mm^3; 0,00000017 km^3; 35400 dm^3; 3625400 cm^3.

❒**6.** Transformați în hm^3: 45 km^3; 93000 dam^3; 8000000 cm^3; 8000000000 mm^3; 8457 m^3; 86500 dm^3.

❒**7.** Transformați în km^3: 7500 hm^3; 82500000000 mm^3; 8500000 dam^3; 102500000 cm^3; 452000 dm^3; 750000 m^3.

❒**8.** a) Care este volumul unui cub cu muchia de 2 cm?

b) Care este volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 6 cm, 8 cm și 9 cm?

c) Câte cuburi cu muchia de 2 cm încap într-o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 6 cm, 8 cm și 9 cm?

d) De câte ori se cuprinde volumul cubului în volumul paralelipipedului?

e) Există vreo contradicție între răspunsurile de de la punctele c) și d)?

❒**9.** Calculați volumul unui cub cu latura de 8 cm.

❒**10.** O cutie cu medicamente este un paralelipiped dreptunghic ce are L = 4 cm, l = 2 cm și h = 1 cm. Câte cutii sunt necesare pentru a umple un bacs cu lungimea de 96 cm, lățimea de 20 cm și înălțimea de 25 cm.

❒**11.** S-au transportat 3 m^3 de pământ cu o rabă în care încap 60000 cm^3. Câte transporturi au fost efectuate.

12. Copiați în caietul vostru și apoi completați tabelul de mai jos, știind că L, *l* și h reprezintă lungimea, lățimea și înălțimea unui paralelipiped dreptunghic, iar V volumul.

L	3 cm	5 dm		8 dm		20 cm
l	2 cm	4 dm	4,2 cm		20 cm	9 mm
h	8 cm		3 cm	10 cm	8 dm	40 mm
V		36 m^3	81,9 cm^3	4 dm^3	1120 dm^3	

13. Trebuie construit un perete lung de 4 m, înalt de 2,10 m și gros de 30 cm, cu ajutorul unor cărămizi cu lungimea de 20 cm, lățimea de 10 cm și grosimea de 7 cm. Câte bucăți de cărămidă sunt necesare?

14. Calculați și completați:

a) 25 m^3 + 14,8 dam^3 + 125 dm^3 + 0,00049375 dam^3 = ... m^3;

b) 100 m^3 + 1,9 dam^3 + [17.400 dm^3 – (36,640 m^3 – 20,750 m^3)] = ... m^3;

c) 0,000000954 dam^3 + 8,35 m^3 – 17800 cm^3 – 428 · 10^5 mm^3 = ... dm^3.

15. Se construiește un bazin pentru înot în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 25 m, lățimea de 12,50 m și adâncimea de 2,50 m (*fig. E*). Să se calculeze volumul betonului necesar construirii pereților, știind că grosimea pereților este de 30 cm.

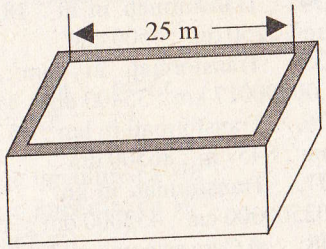


Fig. E

11. Unități de măsură pentru capacitate, transformări

În practică, se folosește termenul de ***capacitate*** pentru volumul unor vase (sticle, butoaie etc.) și ca unitate de măsură, ***litrul*** (*l*).

1 *l* este volumul unui cub cu muchia de 1 dm.

1 *l* = 1 dm^3

Multiplii litrului sunt: ***kilolitrul*** (kl), ***hectolitrul*** (hl) și ***decalitrul*** (dal).

Submultiplii litrului sunt: ***decilitrul*** (dl), ***centilitrul*** (cl) și ***mililitrul*** (ml).

1 kl	1 hl	1 dal	1 *l*	1 dl	1 cl	1 ml
1000 *l*	100 *l*	10 *l*	1 *l*	0,1 *l*	0,01 *l*	0,001 *l*

Transformări

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta, utilizăm următoarea schemă:

kl hl dal *l* dl cl ml

- unitățile mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu 10^n;
- unitățile mici se transformă în unități mari prin împărțire cu 10^n.

(*n* este numărul de segmente dintre cele două unități)

Exemple:

1) 73,5 hl = 73,5 · 10^2 *l* = 7350 *l* (s-a înmulțit cu 10^2 pentru că se transformă din unități mari în unități mici și între cele două unități există 2 segmente).

2) 124000 cl = 124000 : 10^4 hl = 12,4 hl (s-a împărțit cu 10^4 pentru că se transformă din unități mici în unități mari și între cele două unități există 4 segmente).

Exerciții

1. Transformați în kl: 1250 *l*; 12,5 dal; 35 hl; 12500 cl; 125 dl; 1.250.000 ml.

2. Transformați în hl: 150 *l*; 37,95 cl; 0,8 dal; 450000 ml; 45000 dl.

3. Transformați în dal: 750 *l*; 15 hl; 750 cl; 7 kl; 45000 ml; 55 cl.

4. Transformați în *l*: 8 dal; 9,8 kl; 0,7 hl; 45 dl; 1350 ml; 55 cl.

5. Transformați în dl: 25 *l*; 740 cl; 25 ml; 0,18 dal; 0,025 hl; 0,0025 kl;

6. Transformați în cl: 45 dl; 250 ml; 8,5 *l*; 2,2 dal; 0,250 kl; 0,250 hl.

7. Transformați în ml: 7,64 cl; 3,5 *l*; 43 dl; 37,9 dal; 0,0013 kl; 0,5 dl.

8. Completați: 10 hl = ... m^3; 128 ml = ... cm^3; 8, 27 dl = ... dm^3.

9. Se toarnă 3/4 *l* într-o cutie cubică cu latura de 12 cm. Se va vărsa apa peste marginile cutiei? Dar dacă muchia cutiei este de 6 cm?

10. Un bazin paralelipipedic cu adâncimea de 1,5 m și lungimea de 12 m conține 144 m^3 de apă.

a) Câți litri de apă conține bazinul?

b) Care este lățimea bazinului?

11. Folosind o sticlă de 250 ml vrem să umplem un vas în formă de paralelipiped cu lungimea de 3 dm, lățimea 2 dm și înălțimea 1 dm. De câte ori trebuie să golim sticla în vas?

12. De câți litri de apă este nevoie pentru a umple acvariul din laboratorul de biologie, știind că acesta are lungimea de 0,7 m, lățimea de 4 dm, iar apa trebuie să aibă o adâncime de 300 mm.

13. Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 8 m, lățimea de 4 m și adâncimea de 2 m, trebuie umplut cu motorină. Câte transporturi trebuie să facă cisterna cu care se aduce motorina, știind că are capacitatea de 1600 litri?

14. Calculați și exprimați rezultatul în litri:

a) 0,75 hl + 20,5 dl + 2,75 dal;

b) 3,5 dal + 0,04 hl + 3.247 cl;

c) 829 dal + 430 hl + 2,86 dal + 2,7 *l*.

15. Avem un vas de 10 *l* plin cu apă. Cum trebuie să procedăm pentru a rămâne în vas 1 *l* de apă, dacă avem la dispoziție două vase goale de câte 7 *l* și respectiv 3 *l*.

12. Unități de măsură pentru masă, transformări

Ce este masa unui corp?

Masa unui corp exprimă calitatea acestuia de a fi mai ușor sau mai greu decât un alt corp.

Unități de măsură

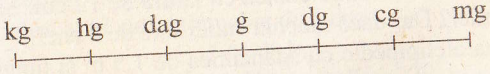
Instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară masa unui corp este ***cântarul*** sau ***balanța***, iar unitatea principală de măsură pentru masă este ***kilogramul***.

Multiplii *kilogramului* sunt: ***chintalul*** (q), ***tona*** (t) și ***vagonul*** (v).

Submultiplii *kilogramului* sunt: ***hectogramul*** (hg), ***decagramul*** (dag), ***gramul*** (g), ***decigramul*** (dg), ***centigramul*** (cg) și ***miligramul*** (mg).

Transformări

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta, utilizăm următoarea schemă:



Exemple:

1) $34,5 \text{ dag} = 34,5 \cdot 10^3 \text{ cg} = 34500 \text{ cg}$.

2) $850000 \text{ mg} = 850000 : 10^6 \text{ kg} = 0,85 \text{ kg}$.

Legătura dintre volumul și masa apei

$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ g}$;

$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ g}; 1 \text{ kg} = 1 \text{ } l$;

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ } l = 1000 \text{ kg} = 1 \text{ t}$.

Exerciții

1. Transformați în kg: 4 hg; $0,11 \cdot 100^4$ mg; $93 \cdot 10^6$ cg; 500 dag; $96 \cdot 10^5$ dg; 9000 g.

2. Transformați în hg: 5 kg; 90 dag; 1200 g; $7 \cdot 10^4$ cg; 9738,5 dg; 280 g.

3. Transformați în dag: 154 hg; 20 hg; 2100 dg; 120000 mg; 4,2 kg; 4500 dg.

4. Transformați în g: 15 dag; 0,04 hg; 1500 cg; 23000 mg; 4,2 kg; 1400 dag.

5. Transformați în dg: 400 g; 80 dag; 4 hg; 3200 mg; 0,0005 kg; 22,6 mg.

6. Transformați în cg: 14 g; 110 mg; 7 dg; 25 dag; 0,00000008 kg; 4 hg.

7. Transformați în mg: 0,005 kg; 0,155 hg; 0,37 dag; 15 g; 60 dg; 80 cg.

8. Transformați în q: 300 kg; 72000 hg; $52 \cdot 10^4$ dag; $4 \cdot 10^7$ cg; 8,7 t.

9. Transformați în tone: 7200 kg; $80 \cdot 10^2$ hg; $4500 \cdot 10^2$ dag; 9000000 g.

10. Transformați în vagoane: 10 t; 14550 kg; 150000 hg.

11. Calculați și exprimați rezultatul în kilograme:

a) 855 g + 312 cg + 0,25 q + 19,35 dag;

b) 0,03 g + 34,5 hg + 82 dg + 0,31 t;

c) 18,9 dag + 1,12 q + 1.624 hg.

12. Câte tone de asfalt sunt necesare pentru o suprafață în formă de pătrat cu latura de 14,2 dm, știind că se folosesc 60 kg de asfalt pe metru pătrat?

13. O cutie de lemn în formă de cub are grosimea pereților de 1 cm și muchia exterioară de 110 cm.

a) Care este volumul exterior și volumul interior al cutiei?

b) Cât cântărește cutia dacă 1 dm^3 de lemn cântărește 60 kg?

14. Câte tone de grâu încap într-un siloz în formă de paralelipiped dreptunghic dacă 1 dm^3 cântărește 680 g, iar volumul silozului este de 0,5 dam^3?

15. De pe două loturi având împreună 206 ha s-a strâns recolta de cartofi, obținându-se de pe fiecare lot câte 19 t la ha. Aflați aria fiecărui lot, știind că de pe primul din ele s-au obținut cu 608 t de cartofi mai mult decât de pe celălalt.

16. O fermă a vândut 18,81 t de mere astfel: o treime din întreaga cantitate cu 6000 lei / kg; o treime din aceeaşi cantitate cu 7500 lei / kg, iar restul cu 8000 lei / kg. Ce sumă s-a încasat?

17. Câte pachete de biscuiţi se află într-o cutie ştiind că un pachet de biscuiţi cântăreşte 75 g, cutia plină are 2,4 kg, iar goală are 150 g.

18. Pentru vopsirea unui cub este necesar 1 kg de vopsea. Dacă după ce am vopsit cubul îl tăiem în cubuleţe cu muchia de două ori mai mică, de câte kg de vopsea mai avem nevoie pentru a vopsi şi feţele neacoperite?

19. De pe un teren în formă de dreptunghi se strânge o recoltă de 387 t de grâu. Ce recoltă se va strânge de pe un teren care dă aceeaşi recoltă la hectar dacă:

a) terenul are aceeaşi lungime, dar este de trei ori mai îngust;

b) terenul are aceeaşi lăţime, dar este de trei ori mai scurt;

c) lungimea şi lăţimea terenului sunt de 3 ori mai mici.

13. Unităţi de măsură pentru timp, transformări

Unităţile principale pentru măsurarea timpului sunt: ***secunda*** (s), ***minutul*** (min), ***ora*** (h), ***ziua***.

1 zi = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s
1 săptămână = 7 zile;
1 lună are 28, 29, 30 sau 31 zile

1 an = 12 luni
1 deceniu = 10 ani
1 secol = 100 ani
1 mileniu = 1.000 ani

1 an are 365 zile sau 366 de zile, după cum luna februarie are 28 sau 29 de zile.

Anii care au 366 de zile se numesc ***ani bisecţi***, iar aceştia se repetă din 4 în 4 ani.

Anul al cărui număr de ordine se divide cu 4 este an bisect.

Exerciţii

1. Transformaţi în secunde: 24 min; 2h 17 min; 1 zi 2h 15 min.

2. Transformaţi în expresii de forma "ore-minute-secunde": 3785 min; 74324 s; 114 min.

3. Câte zile au în total lunile februarie, martie şi aprilie ale anului 2001?

4. a) Ce este un an bisect?

b) Care din anii 1998, 1999, 2000 şi 2001 sunt ani bisecţi?

5. Câte zile au în total anii 2000, 2001 şi 2002?

6. Un călător parcurge 188 km în 3h şi 8 min. Cu ce viteză s-a deplasat călătorul?

7. Un călător pleacă din Bacău la ora 10 şi 45 min şi ajunge la Bucureşti la ora 15. Cât timp a durat călătoria?

8. Completaţi pentru a face adevărate egalităţile:

a) $270 \text{ min} = \frac{\cdots}{6}\text{h}$; b) $55 \text{ min} = \frac{\cdots}{12}\text{h}$; c) $84 \text{ min} = \frac{\cdots}{5}\text{h}$;

d) $84 \text{ s} = \frac{\cdots}{4}\text{min}$; e) $1304 \text{ s} = \frac{\cdots}{60}\text{min}$; f) $1 \text{ h} = \frac{1}{2}\text{h} + \frac{\cdots}{5}\text{min}$;

g) $2\text{h} = 1\frac{1}{2}\text{h} + \frac{\cdots}{20}\text{min}$; h) $3\frac{1}{2}\text{h} = 2\frac{2}{3}\text{h} + \frac{\cdots}{60}\text{min}$.

9. Un ceas o ia înainte cu 2 secunde la fiecare oră. Cu cât o ia înainte ceasul în 3 zile?

10. Trenul Suceava-Bucureşti Nord ajunge în gară la ora 7 şi 45 minute. Se anunţă o întârziere de 20 minute. Când ajunge trenul în gară?

11. Mihaela s-a culcat la ora 21 şi 45 minute şi s-a trezit la ora 7 şi 15 minute. Câte ore a dormit Mihaela?

12. Meciul Rapid Bucureşti – Astra Ploieşti a început la ora 21 şi 30 minute. Se joacă două reprize a 45 minute cu o pauză de 10 minute.

a) La ce oră se termină meciul?

b) Al doilea gol a fost marcat în minutul 10 al celei de-a doua reprize. La ce oră a fost marcat acest gol?

13. La cursa de ciclism organizată la Şcoala 8 Oneşti, cicliştii au plecat din 5 în 5 minute. La ce oră a plecat al cincilea ciclist dacă primul a plecat la ora 8 şi 45 minute? Dar al paisprezecelea?

14. Transformaţi în minute: 3h; 2,4h; $1\frac{1}{3}\text{h}$; 3,25h.

15. Transformaţi în secunde: 20 min; $2\frac{1}{2}\text{h}$; 75 min; 3,24 min.

16. Transformaţi în ore: 372 min; 9000 s; 3 zile; 0,4 zile.

17. Transformaţi 1,5 ani în luni.

18. Câte secunde înseamnă 3,75 minute?

19. Calculaţi:

a) 24 min · 5 = ... h;

b) 24,5 s · 24 = ... min ..... s;

c) 24 h : 5 = ... h ..... min;

d) 34 h 14 min : 4 = ... h ..... min;

e) 2 h 14 min 17 s + 1 h 56 min 24 s = ... h ..... min ..... s;
f) 3 h 15 min 17 s – 1 h 24 min 13 s = ... h ..... min ..... s;
g) 14 h 14 min 17 s + 1 h 16 min 36 s = ... h ..... min ..... s;
h) 1 h 26 min 7 s – 46 min 14 s = ... min ..... s.

❒**20.** Explicați de ce din 8 copii luați la întâmplare, cel puțin doi s-au născut în aceeași zi a săptămânii și din 13, cel puțin doi s-au născut în aceeași lună.

❒**21.** Un bazin de înot este un paralelipiped dreptunghic cu lungimea 20 m, lățimea 10 m și înălțimea de 2 m. În câte ore de umple piscina cu apă știind că prin conducta de umplere curg 25 kl apă pe oră.

PROBE DE EVALUARE

Nivelul A

I. ❒**1.** Cartea "MATE 2000" partea I, clasa a V-a are 154 pagini. Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea paginilor?

❒**2.** Scoateți întregii din fracțiile:

$$\frac{1035}{102};\quad \frac{237}{15};\quad \frac{4104}{128};\quad \frac{2013}{45}.$$

❒**3.** Comparați fracțiile:

a) $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{17}$; b) $\frac{2}{11}$ și $\frac{7}{11}$.

❒**4.** Calculați:

a) $10 - 2{,}7 + 4{,}5$; b) $2{,}8 \cdot 1{,}5 + 32{,}5 : 0{,}5$;

c) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}:5\right)\cdot\frac{5}{2}$; d) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2:\frac{1}{9}$.

❒**5.** Efectuați:

a) 3h 27 min 3 s – 1 h 35 min 17 s;
b) 8,4 dal + 125 dl – 1245 ml;
c) 240 dm + 0,5 hm – 12,3 m.

II. ❒**1.** Introduceți întregii în fracție:

$2\frac{17}{123}$; $5\frac{7}{435}$; $1\frac{4}{73}$; $4\frac{11}{17}$.

❒**2.** Aranjați în ordine crescătoare fracțiile:

a) $\frac{3}{28};\ \frac{23}{28};\ \frac{17}{28};\ \frac{5}{28};\ \frac{25}{28};\ \frac{9}{28};\ \frac{11}{28}$.

b) $\frac{7}{15};\ \frac{7}{23};\ \frac{7}{4};\ \frac{7}{29};\ \frac{7}{19};\ \frac{7}{17};\ \frac{7}{3}$.

❒**3.** Calculați:

a) $0{,}48 : \frac{1}{8}$; b) $0{,}8 + \frac{1}{5}$; c) $\left(\frac{1}{3}+0{,}25\right)\cdot\left(1+\frac{5}{7}\right)$;

d) $0{,}2 + \frac{1}{2} + 0{,}02 \cdot 10$.

❒**4.** Aflați x din:

a) $x + 13{,}227 = 125{,}8$; b) $3{,}5 + x = 27$;

c) $x - 2{,}7 = 0{,}05$; d) $17{,}231 - x = 10{,}124$;

e) $12x = 24$; e) $x : 1{,}2 = 10$.

❒5. Desenați un pătrat cu latura 2 cm. Calculați perimetrul și aria acestuia.

Nivelul B

I. ❒1. Transformați în fracție zecimală fracția $\frac{3}{22}$ și calculați a 2001-a zecimală.

❒2. Efectuați: $\dfrac{\left(0{,}5+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}4}{100\cdot\frac{2}{3}\cdot 0{,}75}\cdot\dfrac{100}{51}$.

❒3. Comparați fracțiile:

a) $\frac{1}{3}$ cu $\frac{7}{18}$; b) $\frac{4}{5}$ cu $\frac{12}{15}$; c) $\frac{4}{9}$ cu $\frac{3}{8}$.

❒4. Calculați:

a) 270 cm + 2,7 dm + 7,24 m + 0,84 km;

b) 1,7 m^2 + 384 dm^2 + 25072 mm^2 + 0,002 dam^2 + 1,6 ha;

c) 3,6 cm^3 + 3600 mm^3 + 0,24 m^3 + 0,24 hm^3 + 24 dam^3 + 1254 dm^3.

❒5. Un robinet umple un rezervor în 6 ore, iar alt robinet umple același rezervor în 3 ore. În câte ore se umple dacă sunt lăsate deschise ambele robinete?

II. ❒1. Efectuați: $\left(\dfrac{\frac{9}{4}-0{,}(6)\cdot 1\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3}+0{,}36(1)}-0{,}4\right)\cdot 1\frac{2}{3}$.

❒2. Desenați două semidrepte [AB și [CD care să aibă:

a) nici un punct comun;

b) un punct comun;

c) un segment comun;

d) o semidreaptă comună.

❒3. a) Desenați un dreptunghi ABCD știind că AB = 3 cm și că perimetrul acestuia este de 10 cm.

b) Calculați aria dreptunghiului.

❒4. Demonstrați că dacă $a \in \mathbf{N}^*$ este cifră diferită de 9, atunci numărul $\dfrac{a,(a)+0,(a)}{0,0(a)+0,a(a)}$ este număr natural.

❒5. Calculați media aritmetică a numerelor x și y știind că:

$$x = \frac{1+\frac{2}{3}}{0{,}5+\frac{1}{0{,}5}} \text{ și } y = \frac{1{,}05-1}{\left(0{,}7+\frac{7}{4}\cdot 4\right):1{,}54}+0{,}99.$$

Nivelul C

I. ❒1. Determinați cifrele x și y în baza zece astfel încât $\frac{x}{y} = \overline{0,x(y)}$, $y \neq 0$.

❒2. Calculați valoarea numerică a expresiei A = x – 2y + 12z unde:

$x = 12\cdot\left(2\frac{1}{3}+1\frac{5}{6}-1\frac{1}{12}\right)$; $y = 5\frac{1}{4}+4\frac{1}{12}-3\frac{1}{3}$ și $z = 4\frac{1}{6}+2\frac{1}{3}-1\frac{7}{12}$.

❒3. a) Arătați că $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}=\dfrac{x}{n(n+x)}$;

b) Calculați $\dfrac{3}{2\cdot 5}+\dfrac{3}{5\cdot 8}+\dfrac{3}{8\cdot 11}+\ldots+\dfrac{3}{1998\cdot 2001}$.

❒4. Arătați că: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}<\dfrac{n-1}{2}$.

❒5. Dintr-un pătrat se obține un dreptunghi prin micșorarea unei laturi cu 2 m, iar a alteia cu 5 m. Determinați latura pătratului știind că aria s-a micșorat cu 74 m^2.

II. ❒1. Simplificați fracția:

$$\frac{3\cdot 4+6\cdot 8+9\cdot 12+\ldots+60\cdot 80}{2\cdot 5\cdot 7+2\cdot 10\cdot 14+2\cdot 15\cdot 21+\ldots+2\cdot 100\cdot 140}.$$

❒2. Determinați toate numerele naturale $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leq 6$, pentru care $\max(2^{3n}, 3^{2n}) > 729$.

❒3. a) Arătați că $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

b) Calculați $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2001}$.

❒4. Arătați că $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}>\frac{n-1}{n}$.

❒5. Un dreptunghi și un pătrat au aceeași arie, de 576 m^2. Lățimea dreptunghiului este $\frac{2}{3}$ din lungimea laturii pătratului. Calculați perimetrul dreptunghiului.

CAPITOLUL TEME DE SINTEZĂ PENTRU RECAPITULARE FINALĂ ȘI EVALUARE

1. Numere naturale. Numere raționale

❒1. Recapitulați cunoștințele teoretice după următorul plan:
- mulțimea numerelor naturale **N**;
- mulțimea numerelor raționale **Q**, incluziunea $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Q}$;
- reprezentare pe axă, compararea și ordonarea;
- operații, proprietățile operațiilor.

❒2. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{1x7}}{\overline{yx}}$ în baza zece care se simplifică cu 3.

❒3. Determinați numărul de trei cifre $\overline{xyz}$ scris în baza 10 care împărțit la răsturnatul său $\overline{zyx}$ să dea câtul 6 și restul 97.

❒4. Determinați numerele naturale x și y, știind că suma lor este 1609 și prin împărțirea lui x la y se obține câtul 3 și restul 201.

❒5. Să se scrie 3^n ca o sumă de 3 numere naturale consecutive ($n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$).

❒6. Media aritmetică a cinci numere este cu 7,14 mai mică decât $\frac{3}{7}$ din 630. Calculați suma numerelor.

❒7. a) Calculați: $10\cdot\left[3\cdot 3^2\cdot 3^3+5^2-\left(3^4\right)^6:3^{18}\right]$.

b) Fie $9^n=81$. Calculați 3^{2n+2} și 3^{4n}.

❒8. Fie numărul $A=3\cdot 10^{n+2}+10^n+2\cdot 10^{n-3}-1$. Specificați cifrele acestui număr și câte cifre sunt din fiecare.

❒9. Împărțind un număr natural nenul la 7 obținem restul egal cu câtul. Determinați numărul și restul. Câte soluții are problema?

❒10. Alexandra și Costin au împreună 110.000 lei. Dacă Costin iar da Alexandrei 30.000 lei aceasta are mai mult decât el cu 30.000 lei. Câți lei are fiecare?

❒11. Suma a două numere naturale este 32. Calculați câte soluții are problema dacă fiecare dintre numere este mai mare ca 11.

❒12. Suma a trei numere naturale este de 260. Suma primelor două numere este 130, iar suma ultimelor două numere este 180. Aflați numerele.

❒13. Diferența a două numere naturale este 488. Dacă micșorăm descăzutul cu 145 și mărim scăzătorul cu 43, calculați diferența noilor numere obținute.

14. Determinați cea mai mică fracție, astfel încât împărțind-o cu fracțiile $\frac{7}{110}$, $\frac{12}{245}$ și $\frac{19}{415}$, să se obțină câturi numere naturale.

15. Să se efectueze:

a) $125\cdot 1111^3 - 5555^3$;

b) $8^7 - \left(2^7\right)^3 + 3^{30} - 9^{15}$;

c) $\dfrac{202+\dfrac{24}{25}+1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}:0{,}75+1{,}1(6)\cdot\dfrac{3}{2}-0{,}25} : \dfrac{5099}{25}$;

d) $2^3+\left[\left(5^3\right)^7-\left(5^7\right)^3+3^5-81\right]:\left\{9\cdot\left[301-10\cdot\left(3\cdot 2^3+2^{2001}:2^{2000}\cdot 3\right)\right]\right\}^2$;

e) $\dfrac{\left[18\frac{1}{6}-\left(3\frac{3}{50}:\frac{15}{2}+3\frac{2}{5}\cdot\frac{19}{50}\right)\right]:\left(19-\frac{19}{8}:\frac{3}{16}\right)}{\left[\frac{1}{7}\left(\frac{40}{9}-\frac{8}{3}\right):\frac{1}{20}+\frac{1}{9}\cdot\left(50-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{1}{35}-\frac{1}{5}\left(\frac{83}{18}-2\right)\right]\cdot 21}$.

16. Demonstrați că fracția $\frac{2n+1}{7n+3}$ este ireductibilă, oricare ar fi numărul natural n.

17. Aflați trei numere, știind că raportul dintre primul și al doilea este 0,(6), raportul dintre al doilea și al treilea este 0,(3), iar produsul dintre primul și ultimul număr este 23328.

18. Calculați media aritmetică a cifrelor x, y și z, știind că:

$\overline{0,xy(z)}+\overline{0,yz(x)}+\overline{0,zx(y)}=1$.

19. Determinați fracția $\frac{x}{y}$ a cărei valoare nu se schimbă dacă se adună numărătorului 4a și numitorului 5a, $a\in\mathbf{N}^*$ și că c.m.m.m.c. al numărătorului și numitorului este 380.

20. La numerotarea unei cărți din colecția „MATE 2000" s-au folosit 438 cifre. Câte pagini are cartea?

2. Mulțimi

1. Recapitulați cunoștințele teoretice după următorul plan:
- mulțime, element, relația de apartenență;
- relații între mulțimi, submulțime;
- operați cu mulțimi.

2. Fie mulțimile: A = {a, b}, B = {c, d, e, f}, C = {b, c, d}, D = {c, d}.

I) Precizați care din următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:

a) $a\in A$; b) $b\in B$; c) $d\in C$; d) $c\notin A$; e) $b\in C$; f) $D\subset C$; g) $A\supseteq C$; h) $A = B$.

II) Calculați:

a) $A\cup B$; b) $A\cup C$; c) $B\cap C$; d) $A\cap D$; e) $C - B$; f) $A - D$; g) $C - D$.

3. Scrieți toate submulțimile mulțimii A = {2, 3, 5}.

4. Determinați numerele x, y și z, știind că:

$\{x^2, 77, 10y + 13\} = \{5y + 2, 4z + 3, 16\}$.

5. Determinați mulțimile A și B, știind că:

a) $A\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

b) $A\cap B = \{1, 5\}$

c) $B - A = \{4, 6\}$.

6. Fie mulțimile:

$A = \{x \mid x\in\mathbf{N}^*, x < 5\}$;

$B = \{x \mid x\in\mathbf{N}^*, 4\le x\le 9\}$

$C = \{x \mid x\in\mathbf{Z}, -2 < x < 6\}$

Calculați cardinalul mulțimilor: $(B - A)\cap(C - B)$; $(A\cup B)\setminus(B\cap C)$.

7. Fie mulțimile:

$A = \{2, 3, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$;

$C = \{x \mid x\in\mathbf{N}, x = 2k + 1, k < 5, k\in\mathbf{N}\}$.

a) Calculați: $A\cup B$, $A\cap B$, $A - B$.

b) Enumerați elementele mulțimii C și apoi calculați card C.

c) Calculați $(A - B)\cap C$ și $(A - C)\cap(B\cap C)$.

8. Enumerați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x\in\mathbf{Z}^*, |x|\le 3\}$

$B = \{x \mid x\in\mathbf{Z}, |x| = 4\}$

$C = \{x \mid x\in\mathbf{Z}^*, x\ge -2, |x| = -x\}$

$D = \{x \mid x\in\mathbf{Z}, x < 3, |x| = x\}$

9. a) Determiați mulțimile:

$A = \{x \mid x\in\mathbf{N}, 2x < 13 \text{ și } x \mid 16\}$

$B = \{x \mid x\in\mathbf{N}, 1 + 2x < 10 \text{ și } 2 \mid x\}$

b) Calculați $A\cup B$, $A\cap B$, $A - B$ și $B - A$.

10. Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x^2 \leq 16\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x^3 \leq 27\}$.
a) Enumerați elementele mulțimilor A și B.
b) Scrieți submulțimile mulțimii B.
c) Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

11. Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 5^a + 5^b, a \neq b\ a, b \in \{0, 1, 2\}\}$, $B = \{y \in \mathbf{N}^* \mid y = x - 5, x \in A\}$, $C = \{z \in \mathbf{N} \mid z = y^c - 1, c \in \{0, 1\}, y \in B\}$. Calculați A, B și C.

12. Fie mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și $3 < x < 7\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}$ și $-3 < x < 7\}$.
Calculați: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $A - B$. Ce relații există între mulți-mile A și B?

13. Determinați numărul de elemente al mulțimii $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 100$ și $2x > 100\}$.

14. Determinați mulțimea A care satisface condițiile:
a) $A \subset \{2, 3, 5\}$;
b) $\{2, 5\} \subseteq A$.

15. Determinați mulțimea A care îndeplinește simultan condițiile:
a) $A \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c, d\}$;
b) $A \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$.

16. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x = 6a^2 - 5, a \in A\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x = 2^{2^a}, a \in A\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x^2 = a, a \in A\}$. Determinați:
$A \cap B \cap D$, $(A \cup B) \cap D$, $A - D$, $(A \cup B) - C$.

17. Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 2x + 1 \leq 9\}$.
a) Reprezentați mulțimile:
$A = \{2x \mid x \in M\}$, $B = \{3x \mid x \in M\}$, $C = \{6x \mid x \in M\}$, $D = \{3x + 1 \mid x \in M\}$.
b) Efectuați: $(A \cap C) \cup B$; $(A \cap B) \cap C$; $(A - C) \cap D$; $(C \cap D) - B$.

18. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 5\}$ și $B = \{1, 3, 4\}$. Care din următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:
a) Orice submulțime a lui B este submulțime a lui A.
b) Există submulțimi ale lui B care sunt și submulțimi ale lui A. Exemplificați.
c) Orice submulțime a lui A este submulțime a lui $A \cup B$.
d) Orice submulțime a lui $A \cap B$ este submulțime a lui B.

19. Fie mulțimile:
$A = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{15}{x} \in \mathbf{N}$ și $\frac{18}{x} \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{4}{x-1} \in \mathbf{N}$ sau $\frac{5}{2x+1} \in \mathbf{N}\}$,

$C = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{3x+5}{x-2} \in \mathbf{N}\}$, $D = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{x+3}{5} \in \mathbf{N}\}$.
a) Calculați mulțimile A, B, C, D.
b) Arătați că $(A \cap B) \cup C = C$, $(B \cap C) \cup A = A$, $A - (B \cap D) = A$.

20. Fie A și B două mulțimi cu card A = 6 și card B = 5.
a) Dacă card $(A \cup B) = 8$, câte elemente are $A \cap B$?
b) Dacă card $(A \cap B) = 4$, câte elemente are $A \cup B$?
c) Care este cel mai mare și care este cel mai mic număr de elemente ale mulțimii $A \cup B$ și în ce situație se obține?
d) Aceeași întrebare pentru $A \cap B$.

3. Ecuații și inecuații

1. Recapitulați cunoștințele teoretice după următorul plan:
- alcătuirea de ecuații, inecuații și probleme care presupun operațiile învățate;
- rezolvarea de ecuații, inecuații și probleme care presupun operațiile învățate.

2. Calculați x din egalitatea: $\frac{0,(3) + \frac{5}{13} + \frac{3}{5}x}{0,0(3) + 13} = \frac{2620}{5083}$.

3. Dacă $0 \leq x \leq 1$ și $1 \leq y \leq 2$, arătați că:
$8 \leq 2x^2 + 4x + 3xy + 3y^2 + 5y \leq 34$.

4. Rezolvați ecuația: $\frac{\frac{2}{9}x}{\frac{3}{4} + 0,5(6) + 1\frac{1}{4}} = \frac{3\frac{1}{33}}{\frac{19}{12} + 0,41(6)}$.

5. Aflați valoarea numărului natural x, știind că:
a) $2 + 2 \cdot [1 + 2 \cdot (1 + 2x)] = 80$;
b) $(x + 1) \cdot (x + 2) = 56$;
c) $[2 \cdot (x + 2) \cdot 5 + 3 \cdot (x + 2)] \cdot 7 = 273$;
d) $[(x : 50 + 30] : 6 - 6 = 0$.

6. Rezolvați inecuațiile:
a) $\frac{1}{7} \cdot x \geq \frac{2}{21}$, $x \in \left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$;
b) $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{2} \geq 2,(3)$, $x \in \{0,1; 4,6; 7,5\}$;

c) $2,(3)\cdot x - 0,7 \geq \frac{2}{9}$, $x \in \left\{\frac{2}{9}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right\}$.

❒7. Calculați:

a) $\frac{1}{3}$ din 12; b) $\frac{3}{7}$ din 14; c) $\frac{1}{8}$ din 18; d) $\frac{1}{5}$ din $\frac{3}{2}$;

e) $\frac{1}{3}$ din $2\frac{1}{7}$; f) 5% din 25; g) 27% din 40; h) 120% din 120.

❒8. Aflați un număr, știind că:

a) $\frac{1}{4}$ din el este 15; b) $\frac{2}{11}$ din el este 80;

c) 3% din el este 1200; d) 125% din el este 625.

❒9. Rezolvați inecuațiile:

a) $0,5\cdot x \leq \frac{5}{4}$, $x \in \mathbf{N}^*$;

b) $0,6\cdot x < 6$, $x \in \mathbf{N}^*$;

c) $2,5\cdot x - 1,3 \geq 2\cdot x + 0,2$, $x \in \mathbf{Q}_+$;

d) $\frac{\frac{3}{10}\cdot x - 0,5}{5} \leq \frac{1}{5}$, $x \in \mathbf{Q}_+$;

e) $0,5\cdot x - \frac{5}{6} \leq 0,2\cdot x - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbf{N}$.

❒10. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + 0,257 = 1,757$; b) $x - 2,124 = 0,876$;

c) $2,47 - x = 0,47$; d) $7x = 5,6$;

e) $1,8 : x = 0,36$; f) $x : 2,35 = 20$;

g) $2,7x - 1,36:0,2 = 2,2$; h) $3,7x - 1,2 = 19,8 - 0,5x$

i) $\frac{1}{3}(x - 0,3) = 0,5$; j) $x : 0,25 - 1 = 0,5$.

❒11. Aflați x și y, știind că: $5x + 3\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$ și $x + y = 3\frac{1}{4}$.

❒12. Într-o excursie participă 80% elevi, 5% profesori și 6 studenți. Câți elevi și câți profesori au fost în excursie?

❒13. Aflați un număr știind că înmulțindu-l cu $2\frac{1}{2}$ obținem același rezultat ca atunci când îl adunăm cu $\frac{3}{2}$.

❒14. Aflați două numere știind că diferența lor este 50 și dacă-l împărțim pe unul la celălalt, obținem câtul 3 și restul 10.

❒15. Suma a două numere este 21, iar unul din ele este de 5 ori mai mare decât celălalt. Aflați numerele.

❒16. Suma a două numere este 6,(3), iar diferența lor este 2,0(6). Aflați numerele.

❒17. Suma a trei numere consecutive este 24. Aflați numerele.

❒18. Mihaela are 10 ani, iar mama ei 43. Peste câți ani vârsta Mihaelei va fi jumătatea din vârsta mami sale?

❒19. Numărul fetelor din clasa noastră reprezintă $\frac{9}{16}$ din numărul elevilor. Dacă în clasa noastră ar veni 2 băieți și ar pleca 2 fete atunci numărul fetelor ar fi egal cu numărul băieților. Câte fete și câți băieți sunt în clasă?

❒20. Suma a patru fracții cu același numitor este $1\frac{7}{11}$. Aflați fracțiile știind că numărătorii lor sunt numere naturale consecutive.

4. Divizibilitate

❒1. Recapitulați cunoștințele teoretice după următorul plan:
- divizor, multiplu;
- criterii de divizibilitate;
- proprietăți.

❒2. a) Scrieți divizorii numerelor 16 și 24.
b) Calculați $D_{16} \cup D_{24}$; $D_{16} \cap D_{24}$; $D_{16} \setminus D_{24}$ și $D_{24} \setminus D_{16}$.

❒3. Scrieți toți divizorii comuni ai numerelor 18 și 30 și specificați care este cel mai mare.

❒4. Un număr natural a nenul este divizibil cu 18. Scrieți patru divizori ai numărului a.

❒5. Un număr natural nenul a are printre divizorii săi numerele 2^2, 3, 7. Scrieți încă 3 divizori ai numărului a.

❒6. a) Care este cel mai mic număr natural care are exact doi divizori?
b) Care este cel mai mic număr natural care are exact trei divizori?

❒7. a) Scrieți următoarele mulțimi prin enumerarea elementelor:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și x este divizor propriu al lui 24$\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și x este divizor al lui 30$\}$.
b) Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

❒8. a) Dacă un număr este divizibil cu 4 și 9 atunci el este divizibil cu 36. Invers este adevărat? Dați exemple.

b) Dacă un număr este divizibil cu 4 și 6, atunci el este divizibil cu 24. Invers este adevărat? Dați exemple.

❒9. Scrieți cinci multipli nenuli ai numărului 3.

❒10. Scrieți toți multipli numărului 5 mai mici sau egali cu 30.

❒11. Scrieți cinci multipli comuni ai numerelor 6, 10 și 5 și specificați care este cel mai mic multiplu comun al acestor numere.

❒12. Folosind definiția pentru „a / b", justificați proprietățile:

1. Dacă a / b și b / c, atunci a / c;
2. Dacă a / b și b / a, atunci a = b;
3. Dacă a, b, d ∈ **N***, a > b și d / a, d / b, atunci d / (a + b) și d / (a – b);
4. Dacă a, b, d ∈ **N*** și d / a, atunci d / ba;
5. Dacă a, b, d ∈ **N***, d / (a + b) și d / a, atunci d / b.

❒13. Calculați cel mai mic număr natural de patru cifre care este multiplu de 31.

❒14. a) Arătați că produsul a două numere naturale consecutive este număr par.

b) Arătați că produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 3.

❒15. a) Calculați numărul de divizori ai numerelor: 1, 2, 5, 10, 16, 72.

b) Calculați numărul de divizori ai numerelor: 2^3; $3 \cdot 2^3$; $3^2 \cdot 2^3$; $3^3 \cdot 2^3$.

c) Calculați numărul de divizori ai numerelor: 2^x; $3 \cdot 2^x$; $3^2 \cdot 2^x$; $3^y \cdot 2^x$.

❒16. Să se arate că:

a) $3^{n+1} \cdot 2^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 4^{n+1}$ se divide cu 42;

b) $15^{n+2} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 5^n$ se divide cu 309.

❒17. Fie mulțimile: $A = \left\{x \in \mathbf{N} \,\middle|\, \frac{12}{x+1} \in \mathbf{N}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbf{N} \,\middle|\, \frac{18}{2x+1} \in \mathbf{N}\right\}$.

Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

❒18. Determinați $x, y \in \mathbf{N}$, pentru care $\frac{6}{(2x+1)(y-1)} \in \mathbf{N}$.

❒19. Determinați numerele naturale x, y și z cele mai mari posibile astfel încât: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 40}{2^x \cdot 3^y \cdot 7^z} \in \mathbf{N}$.

❒20. Determinați cel mai mic $x \in \mathbf{N}^*$ și cele mai mari numere naturale nenule y, z și t, pentru care numărul $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x}{3^y \cdot 5^z \cdot 7^t \cdot 17} \in \mathbf{N}$.

MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE

Lucrarea 1

1. Calculați:

a) 0,75 + 0,1·0,4;

b) 0,144:1,2 + 0,2:0,(2);

c) $\frac{0,4+\frac{1}{7}+\frac{3}{35}}{\frac{16}{81}\cdot 5\frac{1}{16}-\frac{1}{7}}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{31}{39}$.

2. Efectuați:

a) 14h 30min 7s + 7h 48 min 56s – 5h 43 min 17s;

b) 72dam + 14278cm + 0,25km + 4,25m;

c) $124m^3 + 12350dm^3 + 0,004752dam^3$.

3. Un dreptunghi are aria de 1200 cm^2 și lungimea egală cu $\frac{3}{4}$ din lățime. Calculați perimetrul dreptunghiului.

4. Într-un acvariu în formă de cub cu muchia de 3 dm s-au pus 200 dl apă. Câți litri ar trebui adăugați pentru a umple acvariul?

Lucrarea 2

1. Rezolvați ecuația:
x·[1 – 0,5 + 0,(3) – 0,25] = 3 – 0,2.

2. Un dreptunghi are lungimea de 25 cm și lățimea de 9 cm.

a) Calculați perimetrul și aria acestuia.

b) Calculați latura unui pătrat a cărui arie este egală cu aria dreptunghiului.

3. I) Aproximați prin lipsă numărul 7,4375 la:

a) zecimi; b) sutimi; c) miimi.

II) Rotunjiți același număr la:

a) zecimi; b) sutimi; c) miimi.

4. Efectuați:

a) 0,(6) + 0,(6)·0,(3) – 0,(8);

b) 0,7 + 0,2·(0,3 + 0,4·0,5);

c) $\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)+\frac{17}{20}$.

Lucrarea 3

1. Efectuați:

a) 0,21:0,42 + 0,17:0,034 – 2,5;

b) 2 + 0,3 + 0,04 – 1,3 + 0,6;

c) 0,3·0,4 + 0,5·0,6 + 0,7·0,8 + 0,02.

2. Calculați:

a) câte minute sunt în 1,25 ore;

b) 17dg + 354g + 72dag + 5,2kg;

c) 0,7 din 1750.

3. Desenați un cub ABCDA'B'C'D'.

a) Numiți muchiile cubului care conțin punctul A.

b) Numiți fețele cubului care conțin punctul A.

c) Numiți fețele cubului care conțin muchia CD.

4. Lungimea unui dreptunghi este de 36 cm, iar lățimea este 55,(5)% din aceasta.

a) Calculați lățimea dreptunghiului, perimetrul și aria acestuia.

b) Dacă perimetrul dreptunghiului este cu 12 cm mai mare decât perimetrul unui pătrat, calculați latura pătratului.

Lucrarea 4

1. Calculați:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}\right) : 0,1;$

b) 20% din 1500;

c) 666 : (0,3 + 0,03 + 0,003).

2. Dimensiunile unui dreptunghi sunt de 8 m și 6 m.

a) Calculați perimetrul și aria dreptunghiului.

b) Cu câți dm^2 trebuie mărită aria dreptunghiului pentru a se obține aria unui pătrat cu latura de 7 m?

3. Desenați trei puncte distincte A, B și C.

a) Numiți dreptele determinate de aceste puncte.

b) Ce puteți spune despre dreptele AB, AC, BC?

4. Calculați x știind că:

a) $3\cdot\left(x+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}\cdot(x+9).$

b) $2(x+1)\le 3\frac{1}{3}+0,(6)$, $x\in \mathbf{N}$.

Lucrarea 5

1. Dacă x = 2, calculați: $\frac{x}{1-\frac{1}{x}}+\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}+\frac{\frac{1}{1+x}}{x}$.

2. Aria unui dreptunghi este de 80 cm^2 și lățimea este $\frac{1}{5}$ din lungime.

a) Calculați dimensiunile dreptunghiului.

b) Calculați perimetrul acestuia.

3. Aproximați prin adaos numărul 0,4612 la:

a) zecimi;

b) sutimi;

c) miimi.

apoi rotunjiți același număr la:

d) zecimi;

e) sutimi;

f) miimi.

4. Calculați:

a) (0,81 : 0,9 + 0,1 : 0,2) : 0,1;

b) $\frac{1}{6}\left(\frac{5,4-1,2\cdot 2,5}{3,2-3,16}\right)-\frac{1,2}{0,4}$;

c) 2,5 hℓ – 0,07 kℓ + 245 ℓ;

d) 720 m^2 + $\frac{1}{5}$ ha + 42,25 dam^2 – 4257 dm^2.

TESTE DE EVALUARE TIP EXAMEN DE CAPACITATE

Testul I

A.

1. Rezultatul calculului $0,21:0,84 + 0,23 \cdot 5,4 - 1,425:1,5 + 1,4:7$ este .....

2. Media aritmetică a numerelor: 0,1; 0,3; 0,5 şi 0,7 este .....

3. Fracţia $\frac{2+4+6+...+100-51}{1+3+5+...+101}$ după simplificare devine .....

4. Cel mai mare număr de forma $\overline{xy0xy}$ care are cel mai mic număr de divizori este .....

5. Elementele mulţimii $A = \{n \in \mathbf{N} \mid \frac{n^2+n+7}{n+1} \in \mathbf{N}\}$ sunt .....

6. Dublul lungimii unui segment depăşeşte cu 60 cm o treime din lungimea acestuia. Segmentul are lungimea de .....

7. Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 2m, 10dm şi 0,25 km este .....

8. Dacă $x = [2,2(4) - 1,1(3)] : 1,(1)$ şi $y = [5,1(6) + 17,8(3)] : 0,1$, atunci $5x + 1,42y$ este .....

9. Lungimile laturilor unui triunghi sunt exprimate în centimetri prin numere naturale consecutive. Dacă dublul perimetrului triunghiului este de 120 cm, atunci lungimile laturilor triunghiului sunt .....

B

10. Media aritmetică a trei numere raţionale este $\frac{98}{153}$. Calculaţi cele trei numere ştiind că media aritmetică a primelor două este $\frac{79}{102}$ şi al treilea număr este cu $\frac{26}{51}$ mai mic decât primul.

11. Se ştie că $\frac{1}{3}$ dintr-un număr reprezintă cât $\frac{3}{4}$ din altul.

a) Ce fracţie cu numitorul 5 din primul număr va reprezenta $\frac{9}{10}$ din al doilea număr?

b) Determinaţi cele două numere dacă $\frac{1}{2}$ din primul număr întrece cu 1 al doilea număr.

12. Un corp paralelipipedic are dimensiunile de 1m, 2m şi 0,5m.

a) Calculaţi masa acestui corp ştiind că 1 dm^3 de material din care este construit cântăreşte 75 g.

b) Dacă corpul este scufundat într-un bazin plin cu apă, câţi litri de apă curg din bazin?

c) Dacă 1 kg de material costă 37.000 lei, cât costă tot materialul din care este confecţionat corpul?

Testul II

A

1. Numărul $x \in \mathbf{N}$ pentru care fracţia $\frac{14}{5x-1}$ are partea întreagă 3, este .....

2. Dacă $x, y \in \mathbf{N}^*$ şi $\frac{1}{3x} - \frac{1}{7y} = \frac{1}{xy}$, atunci $\frac{y}{x+7}$ cu o aproximaţie de o sutime prin ados este .....

3. Dacă un număr este de 7,26 ori mai mare decât altul şi suma lor este 57,82 atunci numerele sunt .....

4. Dacă $[(x:14 - 10):6 \cdot 5000 - 13500] : 40 = 37,5$ atunci x este .....

5. Un număr prim care are exact trei divizori este .....

6. Dacă fiecare latură a unui pătrat s-ar mări cu 3 cm, atunci perimetrul pătratului este 80 cm. Latura pătratului a fost de ..... cm.

7. Dacă lungimea unui teren dreptunghiular cu perimetrul de 1230 cm este de 4 ori mai mare decât lăţimea atunci aria terenului este de ..... m^2.

8. 0,02 este mai mare decât 0,0002 cu .....

9. Cel mai mic număr natural nenul care înmulţit cu numerele raţionale $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{19}{40}$ dă de fiecare dată un număr natural, este .....

B

10. Dacă $n \in \mathbf{N}^*$, număr par, determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Există un număr par de fracţii nenule, cu numitorul n, care nu sunt supraunitare.

b) Există un număr par de fracții echiunitare cu numitorul mai mic decât n.

c) Există un număr par de fracții nenule, subunitare cu numitorul mai mic decât 2(n + 1).

11. Determinați trei numere naturale, știind că primul reprezintă $\frac{3}{4}$ din al doilea, al doilea reprezintă 0,9(3) din al treilea, iar diferența dintre al treilea și primul este 90.

12. Terenul de sport al unei școli este în formă de dreptunghi cu perimetrul de 300m și lungimea de două ori mai mare decât lățimea. Terenul este înconjurat de o pistă cu lățimea de 2,5m. Calculați:

a) perimetrul exterior al piste;

b) aria terenului de sport;

c) aria pistei.

Testul III

A

1. Rezultatul calculului $[1,3 + 1,1(6) + 1,(5)]: \left(1-\frac{2}{3}\right)^2$ este .....

2. Numerele $x \in \mathbf{N}$ pentru care fracția $\frac{9}{2x-1}$ reprezintă un număr natural sunt .....

3. A 2001 zecimală a numărului $\frac{3}{7}$ este .....

4. Numerele naturale x și y pentru care fracția $\frac{6}{(x+1)(y-1)}$ este echiunitară sunt .....

5. Numărul mai mic decât 50 care are cifra zecilor de trei ori mai mică decât cifra unităților este .....

6. Dacă un dreptunghi are lungimea de cinci ori mai mare decât lățimea și perimetrul de 360 cm, atunci lățimea dreptunghiului este de .....

7. Rezultatul calculului:

240mm + 0,152cm + 0,5dm + 0,0007hm + 4,5dam

este ..... mm.

8. Dacă două robinete umplu un bazin în 20 de minute și unul din ele umple bazinul în 30 de minute, celălalt robinet va umple bazinul în ..... minute.

9. Fie mulțimea: $A = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{7}{32}, \frac{4}{21}, 3\frac{1}{7}, 2\frac{5}{6}, \frac{17}{50}\right\}$. Submulțimea lui A formată din numerele care se transformă în numere zecimale finite este .....

B

10. a) Determinați numărul fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$, având numărătorii mai mici ca 25.

b) Determinați numerele de forma $\overline{xyyz}$, scrise în baza zece, pentru care $\frac{\overline{xy}}{yz} = 2$ $(x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0)$.

11. Fie numerele:

$A = \left[(10 \cdot 1250) \cdot (2^4 \cdot 5)\right] : (2^3 \cdot 5^3 \cdot 25)$,

$B = 2 \cdot [(3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 4] + 6$.

a) Calculați A și B.

b) Calculați (A, B) și [A, B].

c) Calculați: D_A, D_B, $D_A \cap D_B$, $D_A - D_B$.

12. Un viticultor își depozitează vinul într-un vas paralelipipedic cu dimensiunile de 1,8 m, 15 dm, și 120 cm.

a) Calculați volumul vasului.

b) Punând vinul în vas, viticultorul constată că vinul a ocupat $\frac{5}{6}$ din capacitatea vasului. Ce cantitate de vin a obținut?

c) Calculați ce sumă a încasat viticultorul dacă a vândut $\frac{26}{27}$ din cantitatea de vin obținută la prețul de 12000 litrul.

Testul IV

A

1. După o majorare cu 10 procente, un stilou costă 27.500 lei. Prețul inițial era de ..... lei.

2. Fracția $\frac{4}{7}$, aproximată prin lipsă cu $\frac{1}{100}$ este .....

3. Rezultatul calculului 3 + 0,5 + 0,03 + 0,002 este .....

4. Dintre fracțiile $\frac{135}{225}$ și $\frac{51}{90}$ mai mare este .....

5. În 2001 sunt ..... zeci.

6. Perimetrul unui triunghi este de 300 cm. Dacă una din laturi este de 130 cm, alta cu 10 cm mai puțin, atunci cea de a treia latură a triunghiului va fi de ..... cm.

7. Dacă aria unui pătrat este de 196 cm^2, atunci perimetrul pătratului este de ..... cm.

8. 0,7% din 157 + 15,7 + 1570 + 1,57 este .....

9. Dacă diferența a două numere raționale este $12\frac{5}{6}$ și unul din numere este $110\frac{1}{3}$, atunci celălalt număr este .....

B

10. a) Cu ce număr trebuie înmulțit 14 pentru a obține $\frac{137}{2}$?

b) La ce număr trebuie să-l împărțim pe 4928 pentru a obține câtul 14?

c) Prin împărțirea cărui număr la $\frac{137}{2}$ se obține câtul 14?

11. Societatea agricolă TRACTORUL SA a arat în prima zi a lunii octombrie $\frac{4}{15}$ din întreaga suprafață contractată, în a doua zi $\frac{5}{8}$ din rest, în a treia zi $\frac{7}{9}$ din noul rest, în a patra zi $\frac{4}{5}$ din ce a mai rămas, iar în a cincea zi 55 ha, terminând astfel lucrarea. Calculați câte ha a arat în fiecare zi.

12. Mihaela, Andreea și Adi au împreună 106.000 lei. După ce fiecare își cumpără câte un exemplar din *MATE 2000*, constată că Mihaela mai are 5.000 lei, Andreea mai are de trei ori mai mult decât Mihaela, iar Adi mai are cât Mihaela și Andreea la un loc. Calculați:

a) care este prețul unui exemplar din *MATE 2000?*

b) câți bani a avut fiecare?

c) cu ce sumă a rămas Adi dacă și-a cumpărat un creion mecanic care a costat 12.000 lei?

Testul V

A

1. Dacă $x = \frac{2}{3}$ și $y = \frac{1}{5}$, atunci $6x + 5y$ este .....

2. Dacă $\frac{3}{4}$ dintr-un număr este 7, atunci numărul este .....

3. Un muncitor execută 27 piese în 7 ore. 81 de piese de același fel vor fi executate de muncitor în .....

4. Dacă $\frac{1}{3}$ dintr-un număr este este egal cu $\frac{1}{5}$ din altul și suma lor este 16, atunci numerele sunt .....

5. După ce Mihaela a citit $\frac{2}{5}$ dintr-o carte, iau mai rămas de citit 45 pagini. Cartea avea ..... pagini.

6. Rezultatul calculului $3{,}21dam^3 + 12000dm^3 - 107{,}25m^3$ este.....

7. Într-un vas paralelipipedic cu dimensiunile de 6m, 4m și 5m încap .....kl de lichid.

8. Numărul de 5,4 ori mai mare decât (10,35 – 7,14):32,1 este .....

9. Dacă punctele A, B, C sunt așezate în această ordine pe o dreaptă, M respectiv N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv BC și MN = 5 cm, atunci lungimea lui AC este de ..... cm.

B

10. a) Demosntrați că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ avem: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b) Calculați: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{2000\cdot 2001}$.

c) Demonstrați că: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{2000^2} + \frac{1}{2001^2} < \frac{2000}{2001}$.

11. Demonstrați că: $\frac{a+2^{180}}{a+3^{120}} < \frac{b+5^{900}}{b+7^{720}}$, oricare ar fi a și b numere naturale.

12. Se dau trei cuburi cu lungimile muchiilor de 1cm, 3cm și respectiv 6cm.

a) Calculați volumele celor trei cuburi.

b) Câte cuburi cu muchia de 1cm încap în cubul cu muchia de 3cm?

c) Câte cuburi cu muchia de 3cm încap în cubul cu muchia de 6cm?

PROBLEME DATE LA CONCURSURILE ŞCOLARE

1. Un număr de patru cifre are primele două cifre identice, iar cifra unităților 5. Acest număr se împarte la un număr de două cifre şi se obține restul 98. Să se afle deîmpărțitul, împărțitorul şi câtul.

prof. Anghel Bădăluță, etapa locală Argeş

2. Să se determine mulțimea: $A = \{n \in \mathbf{N} \mid 4^n = 176 + 5\cdot 2^n\}$.

prof. Dan Nedeianu, etapa locală Argeş

3. Se consideră numerele:

$$a = 64\cdot 11^6 - 22^6 + 1,\ b = \left[\left(2^2\right)^3 - 2001^0\right] : 3^{2^{1^4}} - \left(1^{2^{3^4}} + 4^{1^{2^3}}\right).$$

Calculați $(b-a)^{2001}$.

4. Să se arate că numărul $n = 9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{1998}$ este divizibil cu cinci numere naturale impare consecutive.

etapa locală, Bucureşti

5. Se dau a, b, x, y $\in \mathbf{N}$. Dacă $2a + 3b + x + 2y$ se divide cu 11, să se arate că numărul $13a + 25b + 89x + 134y$ se divide cu 11.

etapa locală, Constanța

6. Să se determine numerele naturale a, b, c, ştiind că:

$$6\cdot\left(3^a + \overline{bb}\right) + 2^c = 493.$$

etapa locală, Braşov

7. Se dau numerele:

$$a = \left(3^{2^{3^0}} + 2^{3^{1^9}} + 2^3\cdot 5^3 : 10^2\right) : 3^3;$$

$$b = \left[2^{2^3} : \left(2^2\right)^3 + 3^{121} : \left(3^2\right)^{60} + \left(5^3\right)^2 : 5^{2^3}\right] : 2^2;$$

$$c = 10^3 : \left\{123 + 34 : \left[\left(2\cdot 3^2\right)^2 : 18 - 17^0\cdot 1^{125}\right]\right\} + 1.$$

Calculați $a + b - c$.

etapa locală, Covasna

8. Să se determine cifrele x, y, z, ştiind că:

$$\frac{1}{x + 2y + 3z} = \overline{0,xy}.$$

etapa județeană, Ialomița

9. Să se afle $x \in \mathbf{N}$ care verifică simultan condițiile:

a) fracția $\dfrac{2x+3}{x+7}$ este subunitară;

b) x este soluție a ecuației:
$(2x + 1) + (2x + 2) + \ldots + (2x + 100) = 5650$.

prof. Emilia Iacob, etapa județeană Bihor

10. Fie $\overline{abc}$ cel mai număr cu proprietatea că $\dfrac{42}{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbf{N}$. Să se afle suma cifrelor sale.

etapa județeană Brăila

11. Dacă x este cifră, $x \geq 1$, arătați că:

$$\frac{\overline{x1x} + \overline{x2x} + \ldots + \overline{x9x}}{\overline{x5x}} \in \mathbf{N}.$$

prof. V. Dilimoț, D. Chiteş, etapa județeană, Bucureşti

12. Se consideră şirul de fracții $\dfrac{a+b}{7}, \dfrac{b}{6}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{a+1}{4}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{1}{2}$ $(a, b \in \mathbf{N}^*)$. În acest şir numai o fracție este supraunitară şi o alta echiunitară. Determinați numerele a şi b.

prof. A. Latif, J. Georgescu, etapa județeană, Bucureşti

13. Arătați că fracția:

$$\frac{2^{2n+8}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^n + 28^{n+1}\cdot 5^{2n+2} + 4^{n+1}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^n}{3^n\cdot 7^{n+2}\cdot 11^{n+1} + 21^{n+1}\cdot 11^{n+2} - 40\cdot 3^{n+3}\cdot 77^n}$$

se simplifică cu 1000, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

prof. Alex. Zăgrăian, etapa județeană, Cluj

14. a) Efectuați $a = \left(3^x : 3 : 3^2 : 81\right)^{15} - y^{15} + 2000^{0^{2001}}$, dacă $26_x = 20$ şi $\overline{3y02_4} = 210$, unde x este bază de numerație, iar y este cifră.

b) Comparați numerele: $A = 2^0\cdot 2^1\cdot \ldots \cdot 2^{99}\cdot 26$ şi $B = 3^{3302} - 3^{3301} + 21\cdot 9^{1650}$.

prof. Niculina Soporan, Ileana Jurcă, etapa județană, Cluj

15. Fie a, b, c cifre nenule şi distincte, $x = \dfrac{a}{10} + \dfrac{b}{100}$, $y = \dfrac{b}{10} + \dfrac{c}{100}$, $z = \dfrac{c}{10} + \dfrac{a}{100}$ şi $A = x + y + z$.

a) Determinați cea mai mică valoare posibilă şi cea mai mare valoare posibilă a numărului A.

b) Dacă $a + b + c = 12$, determinați cel mai mic număr natural nenul n, astfel încât $n\cdot A \in \mathbf{N}$.

etapa județeană, Constanța

16. Să se afle cea mai mică valoare a numărului natural m pentru care fracția $\frac{2n+7}{3mn}$ este subunitară, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

prof. Cornel Marinescu, etapa județeană, Giurgiu

17. Fie numerele:
$a = 2^{n+1} \cdot 5^n + 1$, $b = 2^n \cdot 5^{n+1} + 1$, $c = 2^{n+3} \cdot 5^n + 7$, $d = 2^{n+1} \cdot 5^{n+3} - 1$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Arătați că a, b, c, d nu sunt prime.

b) Arătați că $\frac{7d+c}{b-a} \in \mathbf{N}$.

c) Poate fi c pătrat perfect, justificați.

etapa județană, Gorj

18. a) Determinați două fracții echivalente, știind că numitorii sunt 3 și 4, iar numărătorul primei fracții este cu 6 mai mic decât numărătorul celei de a doua.

b) Determinați cifra x, știind că $\overline{0,x(30)} = 3 \cdot 0,1(76)$.

prof. M. Focşeneanu, etapa județeană, Prahova

19. a) Aflați numerele naturale nenule a, b, c, dacă $4a + 5b + 15c = 75$.

b) Aflați numerele naturale x, y, z astfel ca $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$ și numerele naturale a, b, c, d astfel ca: $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{17}{5}$.

etapa județeană, Sibiu

20. a) Demonstrați că media aritmetică a numerelor:
$a = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{3}{12} + \ldots + \frac{102}{309}$, $b = \frac{2}{6} + \frac{3}{9} + \frac{4}{12} + \ldots + \frac{103}{309}$,
$c = \frac{3}{6} + \frac{4}{9} + \frac{5}{12} + \ldots + \frac{104}{309}$, este un număr divizibil cu 2.

b) Fie numerele a, b, c, d, e, având media aritmetică 2000. Media aritmetică a primelor 3 este 1600, iar a ultimelor 3 este 2800. Să se afle numărul c.

etapa județeană, Sibiu

21. Suma a trei numere naturale este 2000. Dacă împărțim primul la al doilea obținem câtul 1 și restul egal cu al treilea, iar al treilea este cu 100 mai mic decât al doilea. Aflați cele trei numere.

etapa județeană, Vaslui

22. Calculați a – 2b dacă numerele a și b sunt naturale și $1\frac{1}{7} > \frac{a}{9} > \frac{5}{6} > \frac{b}{3} > \frac{11}{2a+b^2}$.

etapa județeană, Vaslui

23. Aflați numărul x astfel încât numitorul comun al fracțiilor $\frac{3}{x+2}$ și $\frac{5}{12}$ să fie 12.

etapa județeană, Vâlcea

24. Aflați cifrele a și b, știind că $\frac{\overline{aaa}}{\overline{bbb}} = \frac{3}{2}$.

etapa județeană, Vâlcea

25. Aflați numerele naturale x și y care verifică egalitatea $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

prof. N. Dinuță, etapa județeană, Argeș

26. Aflați cel mai mic număr natural diferit de zero astfel încât $\frac{n}{2}$ și $\frac{n}{7}$ să fie pătrate perfecte.

etapa județeană, Giurgiu

27. Să se afle trei numere naturale, știind că două câte două au media aritmetică egală cu 17, 23 și respectiv 25.

28. a) Să se arate că dacă $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+e} = \frac{5}{2}$, atunci $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} + \frac{e}{1+e} = \frac{5}{2}$.

b) Determinați două fracții ordinare de forma $\frac{a}{b}$ și $\frac{a}{c}$, a, b, $c \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}$.

etapa județeană, Neamț

29. Să se afle numerele naturale x, y, z pentru care numărul $n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100}{3^x \cdot 5^y \cdot 7^z}$ să fie cel mai mic număr natural posibil.

etapa județeană, Satu Mare

30. Să se determine numerele naturale distincte a, b > 1 cu proprietatea că numerele: a, b, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ sunt prime.

etapa județeană, Teleorman

31. Fie $a=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{1999}-\frac{1}{2000}$ şi $b=\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{2000}$.
Să se compare numerele a şi b.

etapa judeţeană, Teleorman

32. Se consideră numerele:
$A=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n}{n+1}$ şi $B=1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+...+n\frac{1}{n+1}$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.
Arătaţi că numărul A + B – 2·n este natural.

etapa judeţeană, Timiş

33. Fie şirul de numere raţionale: $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, ..., \frac{1}{n(n+1)}$ ...., $(n\in\mathbf{N}^*)$.

a) Determinaţi grupul de termeni consecutivi ai şirului a căror sumă să fie $\frac{1}{3}$. Justificare.

b) Există în şir un număr finit de termeni consecutivi a căror sumă să fie $\frac{1}{2}$?

34. Fie fracţia ireductibilă $\frac{p}{q}$, $p, q\in\mathbf{N}^*$, $p<q$. Demonstraţi că fracţia $1-\frac{p}{q}$ este de asemenea ireductibilă.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL NUMERE RAŢIONALE

6. Adunarea şi scăderea numerelor raţionale pozitive

1. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; f) 1; g) $\frac{11}{14}$; h) $\frac{5}{9}$; i) $\frac{5^{(5}}{45}=\frac{1}{9}$; j) $\frac{6}{a}$; k) $\frac{6^{(2}}{14}=\frac{3}{7}$; l) $\frac{6^{(6}}{12}=\frac{1}{2}$; m) $\frac{6^{(6}}{12}=\frac{1}{2}$; n) $\frac{6^{(3}}{3\cdot 31}=\frac{2}{31}$; o) $\frac{6^{(6}}{18}=\frac{1}{3}$.

2. a) $\frac{12}{6}=2$; b) $\frac{14}{7}=2$; c) 1; d) 1; e) 3; f) 1; g) 2; h) $\frac{1}{3}$; i) 1; j) 1; k) 1; l) 1; m) 1; n) 1; o) $\frac{30^{(30}}{60}=\frac{1}{2}$; p) 1; r) 1; s) $\frac{31}{36}$.

3. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{4}$; g) $\frac{6^{(6}}{42}=\frac{1}{7}$; h) $\frac{7^{(7}}{7\cdot 8}=\frac{1}{8}$; i) $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$; j) $\frac{25^{(25}}{50}=\frac{1}{2}$; k) $\frac{25^{(25}}{125}=\frac{1}{5}$; l) $\frac{27^{(27}}{54}=\frac{1}{2}$.

4. a) $\frac{5}{11}=\frac{1}{11}+\frac{4}{11}=\frac{2}{11}+\frac{3}{11}$; b) $\frac{7}{14}=\frac{1}{14}+\frac{13}{14}=\frac{2}{14}+\frac{12}{14}=\frac{3}{14}+\frac{11}{14}=\frac{4}{14}+\frac{10}{14}=\frac{5}{14}+\frac{9}{14}+\frac{6}{14}+\frac{8}{14}=\frac{7}{14}+\frac{7}{14}$; c) $\frac{35}{11}=\frac{30}{11}+\frac{5}{30}=\frac{1}{11}+\frac{34}{11}=...$; d) $\frac{7a}{17}=\frac{a}{17}+\frac{6a}{17}=\frac{2a}{17}+\frac{5a}{17}=...$; e) $\frac{5a+1}{7a}=\frac{5a}{7a}+\frac{1}{7a}$; f) $\frac{a+9}{a+7}=\frac{a}{a+7}+\frac{9}{a+7}$; g) $\frac{2a+11}{2a+7}=\frac{2a}{a+7}+\frac{11}{a+7}$.

5. a) $\frac{6}{7}=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$; b) $\frac{18}{11}=\frac{9}{11}+\frac{9}{11}=\frac{6}{11}+\frac{6}{11}+\frac{6}{11}=\frac{3}{11}+\frac{3}{11}+\frac{3}{11}+\frac{3}{11}+\frac{3}{11}+\frac{3}{11}$; c) $\frac{102^{(2}}{64}=\frac{51}{32}=\frac{17}{32}+\frac{17}{32}+\frac{17}{32}=\underbrace{\frac{3}{32}+\frac{3}{32}+...+\frac{3}{32}}_{17\text{ termeni}}=\underbrace{\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{32}}_{51\text{ termeni}}$.

6. a) $\frac{7}{15}+\frac{11}{15}$; b) $\frac{12}{7}+\frac{3}{7}$; c) $\frac{117}{1735}+\frac{153}{1735}$; d) $\frac{5}{23}+\frac{11}{23}+\frac{17}{23}$; e) $\frac{356}{2357}+\frac{147}{2357}+\frac{253}{2357}$; f) $\frac{12}{1537}+\frac{24}{1537}+\frac{157}{1537}+\frac{324}{1537}$; g) $\frac{1}{317}+\frac{99}{317}=\ldots$; h) $\frac{523}{975}=\frac{1}{975}+\frac{522}{975}=\ldots$; l) $\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\ldots+\frac{50}{50}$; j) $\frac{1}{n}+\frac{6}{n}+\frac{12}{n}+\ldots+\frac{(n-1)\cdot n}{n}$.

7. $\frac{5}{17}=\frac{1}{17}+\frac{4}{17}=\frac{2}{17}+\frac{3}{17}=\frac{0}{17}+\frac{5}{17}$; a) $\frac{7}{17}=\frac{0}{17}+\frac{7}{17}=\frac{1}{17}+\frac{6}{17}=\frac{2}{17}+\frac{5}{17}=\frac{3}{17}+\frac{4}{17}$; h) $\frac{9}{17}=\frac{0}{17}+\frac{9}{17}=\frac{1}{17}+\frac{8}{17}=\frac{2}{17}+\frac{7}{17}=\frac{3}{17}+\frac{6}{17}=\frac{4}{17}+\frac{5}{17}$.

8. $\frac{202}{129}$; **9.** $\frac{124}{235}$; **10.** a) $\frac{15}{7}$; b) $\frac{49}{49}=1$; **11.** $\frac{10}{17}$ din lucrare; **12.** a) $\frac{24a}{31}$; b) $\frac{21a}{21}=a$; c) $\frac{86a}{13}$; d) 1; e) 1; **13.** $\left(a+\frac{1}{5}\right)\in\left\{\frac{8}{15},\frac{66}{155},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{29}{120},\frac{97}{310},\frac{42}{155},\frac{62}{85},\frac{9}{25},\frac{36}{155},\frac{107}{185}\right\}$; $\left(\frac{7}{31}+a\right)\in\left\{\frac{52}{93},\frac{14}{31},\frac{7}{31},\frac{128}{155},\frac{199}{744},\frac{21}{62},\frac{32}{155},\frac{398}{527},\frac{299}{775},\frac{8}{31},\frac{693}{1147}\right\}$. **14.** a) $\frac{41}{3}$; b) $\frac{13}{28}$; c) $\frac{187}{48}$; d) $\frac{3b+5a+ab+7}{a^2b^2}$.

15. $a=\frac{8^{(4}}{12}=\frac{2}{3}$; $b=\frac{8^{(4}}{100}=\frac{2}{25}$; $c=\frac{7}{48}$; $a+c=\frac{39^{(3}}{48}=\frac{13}{16}$; $a+b=\frac{56}{75}$; $a+b+c=\frac{1071^{(3}}{1200}=\frac{357}{400}$. **16.** a) $\frac{7}{6}$; b) $\frac{31}{28}$; c) $\frac{19}{54}$; d) $\frac{34}{145}$; e) $\frac{48^{(4}}{180}=\frac{12^{(3}}{45}=\frac{4}{15}$; f) $\frac{113}{54}$; g) $\frac{4}{5}$; h) $\frac{14}{9}$; i) $\frac{41}{30}$; j) $\frac{179}{128}$. **17.** a) $\frac{13}{40}$; b) $\frac{164}{180}$; c) $\frac{65}{32}$; d) $\frac{98}{45}$; **18.** a) $\frac{40}{441}$; b) $\frac{75}{539}$; c) $\frac{11}{216}$; d) $\frac{97}{252}$; e) $\frac{7}{5}$; f) $\frac{1357}{10000}$.

19. a) $\frac{5050}{2003}$; b) $\frac{2550}{2003}$; c) $\frac{2500}{2003}$. **20.** $\frac{13}{36}$. **21.** a) $\frac{1}{12};\frac{1}{6};\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 2 ore.

22. $\frac{2}{9}$; da. **23.** a) 180; b) $\frac{63}{64}$. **24.** $\frac{1134}{127}$. **25.** a) 2; b) 3; c) 10; d) $\frac{19}{13}$; e) $\frac{29}{5}$; f) $\frac{171}{30}$. **26.** a) $\frac{69}{14}$; b) $\frac{103}{42}$; c) $\frac{31}{4}$. **27.** a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{10}{9}$; c) $\frac{6}{17}$; d) $\frac{3}{14}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{5}$; g) $\frac{1}{3}$; h) $\frac{4}{9}$; i) $\frac{4}{a}$; j) $\frac{1}{3}$; k) $\frac{1}{3}$; l) $\frac{2}{93}$; m) $\frac{2}{9}$. **28.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{8}{7}$; c) $\frac{3}{4}$;

d) $\frac{8}{9}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{15}{19}$; g) $\frac{18}{11}$; h) $\frac{2}{27}$; i) $\frac{19}{50}$; j) $\frac{127}{50}$; k) $\frac{9}{10}$; l) $\frac{8}{15}$; m) $\frac{23}{28}$; n) $\frac{44}{25}$; o) $\frac{4}{15}$; p) $\frac{8}{21}$; r) $\frac{8}{47}$; s) $\frac{7}{18}$. **29.** a) $\frac{15}{15}-\frac{7}{15}$; b) $\frac{12}{7}-\frac{3}{7}$; c) $\frac{153}{1735}-\frac{117}{1735}$; d) $\frac{17}{23}-\frac{11}{23}$; e) $\frac{356}{2357}-\frac{253}{2357}$; f) $\frac{324}{1537}-\frac{157}{1537}$; g) $\frac{11}{317}-\frac{1}{317}$; $\frac{12}{317}-\frac{2}{317}$; $\frac{13}{317}-\frac{3}{317}$; $\frac{14}{317}-\frac{4}{317}$; $\frac{15}{317}-\frac{5}{317}$. **30.** $\frac{3}{123}$; **31.** $\frac{36}{215}$;

32. $a-\frac{1}{100}\in\left\{\frac{97}{300},\frac{269}{31000},\frac{683}{1700},\frac{59}{100},\frac{19}{25},\frac{369}{50},\frac{189}{20},\frac{883}{100},\frac{3}{20},\frac{207}{9300},\frac{1363}{3700}\right\}$

$\frac{3}{4}-a\in\left\{\frac{5}{12},\frac{81}{124},\frac{23}{68},\frac{3}{20},\frac{17}{24},\frac{79}{124},\frac{421}{620},\frac{15}{68},\frac{59}{100},\frac{89}{124}\right\}$. **33.** a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{37}{48}$; c) $\frac{13}{119}$; d) $\frac{4}{ab}$. **34.** $\frac{4}{27}$. **35.** $\frac{115}{732}$. **36.** a) $\frac{1}{14}$; b) $\frac{17}{144}$; c) $\frac{43}{117}$. **37.** a) $\frac{6}{7}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{6}{5}$; d) $\frac{8}{13}$; e) $\frac{4}{5}$; f) $\frac{118}{65}$. **38.** a) $\frac{57}{14}$; b) $\frac{5}{42}$; c) $\frac{13}{8}$. **39.** a) $\frac{57}{14}$; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{13}{8}$. **40.** Se aduc la același numitor. **41.** Se aplică ex. 40 și se obține a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{8}{33}$; c) $\frac{3}{7}$; d) $\frac{5}{n(n+5)}$.

7. Compararea fracțiilor

1. a) $\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{5}{7};\frac{11}{7}$; b) $\frac{2}{9};\frac{3}{9};\frac{5}{9};\frac{7}{9}$; c) $\frac{2}{17};\frac{3}{17};\frac{5}{17};\frac{17}{17};\frac{20}{17}$; c) $\frac{9}{14};\frac{9}{10};\frac{9}{4};\frac{9}{2};9$ d) $\frac{11}{20};\frac{11}{17};\frac{11}{7};\frac{11}{3}$; e) $\frac{5}{11};\frac{5}{9};\frac{5}{8};\frac{5}{7}$; f) $\frac{b}{x};\frac{c}{x};\frac{a}{x}$; g) $\frac{x}{c};\frac{x}{b};\frac{x}{a}$. **2.** a) $\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$; b) $\frac{14}{17}<\frac{14}{11}$; c) $\frac{8}{5}<\frac{3}{4}$; d) $\frac{17}{31}<\frac{12}{19}$; e) $\frac{74}{29}>\frac{31}{31}$; f) $\frac{|-4|}{15}>\frac{1}{|-10|}$; g) $\frac{1}{10}<\frac{1}{100}$; $\frac{1}{2^3\cdot 5}=\frac{3}{120}$; $\frac{2002}{2003}>\frac{2003}{2004}$. **3.** a) $\frac{|-7|}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{4};\frac{3}{4};\frac{4}{7}$; b) $\frac{45}{5+14}$; $\frac{3\cdot 5}{9+10}$; $\frac{7^2-6^2}{7+12}$; $\frac{22}{19}$. **4.** Efectuarea temei la matematică.

5. a) $a < c$; b) $b > a$; c) $b > a$; d) $\frac{c}{a} > \frac{b}{a}$. **6.** a) $\frac{19}{6}$; b) $\frac{29}{7}$. **7.** $4 < \frac{17}{4} < 5; 2 < \frac{5}{2} < 3; 2 < \frac{27}{10} < 3; 4 < \frac{49}{11} < 5$. **8.** $A = \left\{\frac{6}{12}, \frac{7}{12}, ..., \frac{26}{12}\right\}$; $B = \left\{\frac{15}{3}, \frac{15}{4}\right\}$. **9.** a) egale; b) prima mai mare decât a doua.

10. a) $n \in \{10, 11, 12, 13\}$; b) $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; c) $n \in \{8, 9, 10\}$.

11. a) $\frac{x+1}{x}$; b) $\frac{x+1}{x+2}$. **12.** a) $n = 1$; b) $n = 1$. **13.** $\overline{14x} : 5 \Rightarrow \overline{14x} \in \{140, 145\}$; $\overline{2y0} : 3 \Rightarrow \overline{2y0} \in \{210, 240, 270\}$ şi $\frac{145}{210}, \frac{140}{210}, \frac{145}{240}, \frac{140}{240}, \frac{145}{270}, \frac{140}{270}$.

14. $\frac{29}{720}$; **15.** a) $\frac{102}{912}$; b) $\frac{192}{112}$. **16.** a) $\frac{2^{15}}{3^{14}} < \frac{3^8}{2^{18}}$; b) $\frac{3^{18}}{2^{20}} > \frac{2^{31}}{3^{16}}$; c) $\frac{5^{23}}{3^{31}} < \frac{3^{26}}{5^{15}}$; d) $\frac{2^{17}}{5^9} > \frac{5^{21}}{2^{58}}$. **17.** $\frac{2^{2^{3^2}}}{3^{2^{3^2}}} < \frac{3^{2^{3^2}}}{4^{2^{3^2}}}$. **18.** $x \in \{0, 1, 2\}$. **19.** a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; c) $x = 1$; d) $x \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$; e) $x \in \{1, 2, ..., 9\}$; f) $x \in \{1, 2, 3, ..., 7, 8\}$; g) $x = 1$; h) $x \in \{1, 2\}$.

8. Scrierea fracțiilor cu numitori puteri ale lui 10 sub formă zecimală. Rotunjiri

1-6. Se folosesc noțiunile teoretice prezentate. **7.** a) 43, 12; b) 10,003; c) 0,04; d) 123, 237; e) 0,937; f) 4,9. **8.** a) 2,047m; 5,04m; 1,23m; 0,005m; b) 4,59ℓ; 6,04ℓ; 1,7ℓ; 0,08ℓ; 0,123ℓ; c) 5,05g; 14,04g; 0,147g; 1000,004g.

11. a) 0,4; 1,7; 14,3; 200,3; 1; 5000,1; b) 0,03; 0,47; 4,35; 1,23; 14,75; 0,07; c) 0,007; 0,054; 0,147; 1,437; 0,00005; 0,0043; **13.** a) {37; 3; 7; 5; 11; 38; 56; 132; 8; 3807}; b) {0; 0,4; 0,23; 0,41; 0; 0,012; 0,904; 0,95; 0; 0,001}; c) {0; 0; 3; 1; 0; 1; 0; 5; 0; 0}; **14.** a) 5,4; b) 17,07; c) 0,05; d) 3,43; e) 0,004; f) 0,000124; g) 0,041; h) 0,4058; i) 43,132; j) 6,48; k) 4,573; **15.** a) 4,6; 7,3; 1,4; 5,3; b) 0,17; 5,71; 45,72; 1,15; c) 1; 10; 36; 11. **16.** a) cu o unitate: 22; 1; 3; 1; cu o zecime: 21,6; 0,4; 2,1; 0,1; cu o sutime: 21,57; 0,31; 2,02; 0,01; b) cu o unitate: 21; 0; 2; 0; cu o zecime: 21,5; 0,3; 2; 0; cu o sutime: 21,56; 0,3; 2,01; 0. **17.** a) 4,39; 14,52; 0,33; 1; 5,72; 0,01; b) 4; 14; 0; 1; 5; 0; **19.** a) 5,5; 5,9; 6,4; 6,8; b) prin lipsă: 5; 5; 6; 6; prin adaos: 6; 6; 7; 7; **20.** a) 3,9; 4,5; 5,2; 5,6. **21.** a) 7,931; 7,932; ...; 7,939; b) 14,1231; 14,1232; ... ; 14,1239..

9. Compararea, ordonarea, reprezentarea pe axă a numerelor raționale scrise sub formă zecimală

1. a) 0,22 < 0,222; b) 2,17 < 2,71; c) 0,999 < 1; d) 999,999 < 1000; e) 4,157 < < 4,175; f) 487,1 = 487,10; **2.** a) 0,125; 0,1256; 2,03; 2,05; 4,17; 5,18; 6,31. **3.** ex. 2,451; 2,457; **4.** a) 25,1; 24,01; 5,7001; 4,107; 1,12; 0,707; 0,7; 0,4004. **5.** a) F; b) F; c) F; d) A; e) F; f) F; **6.** a) =; >; >; b) <; <; >; c) = ; <; <; d) =; =; <; **8.** a) 5,3; 5,7; 6,2; 6,6; b) 4,9; 5,2; 5,7; 6,2; 6,5; c) 7,7; 8,2; 8,5; 10; 10,2; 10,5. **10.** b) 7,43; 7,44; 7,445; c) 7,4001; 7,4444; 7,4315; **11.** a) 0 < 0,12 < 1; analog; b) 0,1 < 0,12 < 0,2; analog; c) 0,11 < 0,12 < 1,01; **12.** 7,23; 7,32; **13.** 0,51; 0,15; **14.** 1,125; **15.** 24,507.

10. Adunarea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule

1. a) 24,011; b) 138,824; c) 2,2422; d) 115,773; e) 287,906; f) 1928,223; **2.** a) 11,72; b) 49,74; c) 9,7; d) 327,6; e) 126,53; f) 11,735; g) 618,22; h) 13,653; i) 471,75; j) 13,446; **3.** a) 4,85; b) 14,1; c) 8,55; d) 5,59; e) 59,316; f) 100,58; g) 20,758; h) 557,541; i) 17,9; **4.** a) 304,7; b) 170,1855; c) 3566,205; **5.**a) 133,89 respectiv 133,9; b) 250,76 respectiv 250,77; c) 35,35 respectiv 35,36. **6.** a) 32728,19; b) 1304,45; c) 324,793; **7.** a) $x = 1$, $y = 4$; $x = 2$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 2$; $x = 4$, $y = 1$. **8.** a) 97,32; b) 343,76; c) 1044,753; d) 43; e) 44,04; f) 53,75; g) 42,753; h) 57,5.

11. Scăderea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule

1. a) 24,009; b) 10,58; c) 115,2; d) 1,818; e) 9,9; f) 169,4; g) 3,28; h) 17,38; i) 0,3; **2.** a) 304,4; b) 23,4; c) 2,695; d) 110,22; e) 11,07; f) 382,5; g) 1,557; h) 7,96; i) 1,15; **3.** a) 3,852; b)24,898; c) 78,45; d) 2,692; e) 316,121; f) 2,5; g) 21,29; h) 10,166; i) 24,783; **4.** a) 24,89 respectiv 24,9; b) 17,96 şi 17,97; c) 8,12 şi 8,13; d) 8,49 şi 8,5; e) 7,83 şi 7,84; f) 3,75 şi 3,76. **5.** a) 10342,55; b) 0,0095; c) 284,27; d) 123,97; e) 28,23; f) 4,42; **6.** a) 43,098; b) 772,344; c) 722,45; d) 531,821; e) 25,025; f) 67,748; g) 202,413; h) 339,57; i) 154,9; j) 113,58; k) 234,995; ℓ) 281,63. **7.** a) 30,03; b) 183,47; c) 1983,463; d) 2,61; e) 4,65; f) 153,46; g) 9,475; h) 0,33. **8.** a) 7,1; b) 7,01; c) 0,101; d) 0,101; e) 0,00099; f) 0,0009. **9.** a) 235,43; b) 9073,04; c) 4089,98; d) 362,65; e) 431,57; f) 7979,828; **10.** a) 1821,977; b) 100372,621; c) 177,29; d) 6,797; e) 12,076; f) 874,97; **11.** a) 549,58; b) 983,23 respectiv 983,24; c) 23,03 respectiv 23,04; d) 2563,15 respectiv 2563,16; **12.** a) 1465,52 – 189,133 = = 1276,387; b) 110,853 – 24,112 = 86,741.

12. Înmulțirea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule

1. a) 1,72; 455; 12,3; 1251,23; b) 17,2; 4550; 123; 12512,3; c) 172; 45500; 1230; 125123; **2.** a) 3,45; b) 1,365; c) 4,9566; d) 15,85; e) 0,48; f) 1,01;

g) 202,005; h) 0,0003; i) 1,72; **3.** a) 14,17 respectiv 14,18; b) 431,25; c) 5,78 şi 5,79; d) 34,01 şi 34,02; e) 82,4; f) 2570; g) 14170; h) 104,25; i) 70,31 şi 70,32; j) 0,02; k) 0,88 şi 0,89; ℓ) 94,27 şi 94,28; **4.** a) 1004,1; b) 1; c) 2068,1; d) 991; e) 27,1; f) 35,2; g) 75,3; h) 47,3; i) 0,1; **5.** Se mută virgula peste 1,2 sau trei cifre la dreapta. **6.** Se mută virgula peste 1, 2 sau trei cifre la stânga; **7.** a) 362,458; b) 304,8; c) 2540; d) 25400; e) 31,75; f) 3924,3; g) 951,23; h) 381; i) 3175; j) 8255. **8.** a) 59,3; b) 17; c) 19; d) 1587,5; e) 0,6; f) 0,2; g) 48,6; h) 894,6; **9.** a) 420; b) 152; c) 36592,5; d) 10345,5; e) 802; f) 3906,09; **10.** a) 45; b) 540; c) 153; d) 549; e) 69300; f) 4050; g) 11,7; h) 56,07; i) 361,8; j) 69,3; k) 1459,8; l) 4500.

13. Împărțirea numerelor naturale; împărțirea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule la 10^n, $n \in N$, la un număr natural, la un număr zecimal

1. Se mută virgula la stânga peste 1, 2 sau 3 cifre. **2.** a) 27,4; b) 12,25; c) 687,5; d) 102,14; e) 17,95; f) 16,34; **3.** a) 2,92; b) 0,82; c) 1530,2; d) 0,01; e) 35,7; f) 43,74; **4.** a) 35,426; b) 7749,793; c) 239,484; d) 14,045; e) 61,225; f) 179,458; **5.** a) 0,03; b) 24,75; c) 645,66; d) 4,09; e) 1,26; f) 0,97. **6.** a) 6,72; b) 1,82; c) 4,97; d) 1,92; e) 1,38; f) 1,40; **7.** a) câtul este de ordinul zecilor; b) câtul este 18,113; c) câtul este 18 şi restul este 0,224; d) câtul este 18,1 şi restul este 0,027; e) câtul este 18,11 şi restul este 0,007; f) câtul este 18,113 şi restul este 0,001; g) pentru c) avem: $18 \cdot 1,97 + 0,224 = 35,684$; pentru d) avem: $18,1 \cdot 1,97 + 0,027 = 35,684$; pentru e) avem: $18,11 \cdot 1,97 + 0,007 = 35,6837$; pentru f) avem: $18,113 \cdot 1,97 + 0,001 = 35,6836$.
8. Se mută virgula la dreapta peste 1, 2 sau 3 cifre. **9.** Prin lipsă: a) 11,77; b) 0,05; c) 30,05; d) 77,93; e) 16,1; f) 58,07. Prin adaos: a) 11,78; b) 0,06; c) 30,06; d) 77,94; e) 16,11; f) 58,08. **10.** a) 685,76 kg; b) 119,07 t.

14. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a unui nunmăr care are un număr finit de zecinale nenule

1. a) 0,01; 0,25; 0,36; 1,44; 11,56; 56,25; 9,61; b) 0,001; 0,125; 0,216; 1,728; 39,304 ; 421,875; 29,791; **2.** a) prima variantă; b), c), d) a II-a variantă; **3.** a) $(0,1)^8$; b) $(0,2)^6$; c) $(0,3)^7$; d) $(0,4)^8$; e) $(0,5)^3$; f) $(0,1)^6$; **4.** a) 0,6; $(0,6)^3$; $(0,6)^0 = 1$; b) $(0,2)^2$; $(0,2)^0 = 1$; 0,2; c) $(0,9)^3$; (0,9); $(0,9)^0$; d) $(0,7)^2 \cdot (0,7)^3 = (0,7)^1 \cdot (0,7)^4 = (0,7)^0 \cdot (0,7)^5$; e) $(0,4)^{25}$; $(0,4)^{25}$; **5.** primele variante; **6.** a) $(0,3)^2$; b) $(1,1)^2$; c) 1; d) 0,7; e) 1,25; f) 1; **7.** a) 0,3; b) 1; c) $(0,7)^2$; d) 1; e) $(2,3)^2$; f) $(2,15)^{x-5}$; **8.** b) $(0,9)^2$; c) $(0,3)^{13}$; d) $(0,4)^0$; e) $(1,7)^1$; f) $(1,1)^7$; g) $(0,5)^7 = (0,5)^9 : (0,5)^2$; h) $(1,2)^0 = (1,2)^5 : (1,2)^5$.

9. a) şi c) varianta I, b) varianta a II-a. **10.** a) $(0,5)^{33}$; b) $(1,7)^{54}$; c) $(1,2)^{10}$; d) $(0,8)^{24}$; e) $(0,2)^{60}$; f) $(0,7)^{150}$; g) $(1,06)^{1600}$; h) $(0,1)^6$; i) 1; j) 1; k) 1; ℓ) $(2,3)^{20}$; **11.** b) $(0,2)^6 = [(0,2)^2]^3 = [(0,2)^3]^2$; c) $(0,5)^4 = [(0,5)^1]^4 = [(0,5)^4]^1$; d) $(0,7)^{45} = [(0,7)^9]^5 = [(0,7)^5]^9$; e) $(1,7)^{15} = [(1,7)^5]^3 = [(1,7)^3]^5$; f) $(2,3)^{17} = [(2,3)^{17}]^1 = [(2,3)^1]^{17}$. **12.** a) $(0,2)^3 \cdot (0,3)^3$; b) $(0,3)^2 \cdot (0,5)^2$.
13. b) $(0,5)^3 \cdot (0,7)^3 = [(0,3) \cdot (0,7)]^3 = (0,21)^3$; c) $(0,1)^4 \cdot (0,2)^4 = [(0,1) \cdot (0,2)]^4 = [0,02]^4$; d) $(0,3)^4 \cdot (0,5)^4 = [(0,3) \cdot (0,5)]^4 = (0,15)^4$; e) $(3,5)^0 \cdot (0,1)^0 = (3,5 \cdot 0,1)^0 = 1$; f) $(0,2)^3 \cdot (0,3)^3 \cdot (0,5)^3 = [(0,2) \cdot (0,3) \cdot (0,5)]^3 = (0,03)^3$. **14.** a) 10^2; b) $(1,1)^3$; c) $(1,2)^4$; d) $(1,8)^3$; e) $(0,5)^4$; f) $(0,1)^2$.

15. Periodicitatea, aproximări zecimale*

10. 1,7; b) 10,34; c) 0,017; d) 10,0009; e) 0,0054; f) 0,5; g) 8,5; h) 3,125; i) 0,9375; j) 1,625; **2.** a) 1,(8); b) 2,(074); c) 27,(6); d) 3,(703); e) 4,(8); f) 5,(5); g) 43,(6); h) 5,(629); i) 2,(54); j) 53,(06); **3.** a) 2,8(3); b) 1,58(3); e) 2,3(8); d) 17,5(3); e) 0,58(3); f) 9,625; g) 1,9(4); h) 1,902(7); i) 27,91(6); j) 17,8(3); **4.** a) $\frac{66}{5}$; b) $\frac{249}{100}$; c) $\frac{7}{4}$; d) $\frac{11003}{1000}$; e) $\frac{7501}{2500}$; **5.** $5,(5) = 5\frac{5}{9}$; $7,(4) = 7\frac{4}{9}$; $0,(23) = \frac{23}{99}$; $0,(40) = \frac{40}{99}$; $0,(235) = \frac{235}{999}$; **6.** $3\frac{11}{45}$; $4\frac{448}{495}$; $\frac{617}{4995}$; $5\frac{16}{45}$; $3\frac{4}{165}$; $3\frac{2413}{9990}$; $3\frac{2413}{9990}$; $2\frac{13}{45}$; $1\frac{107}{495}$; $2\frac{137}{9900}$. **7.** $4 \cdot 100 + + 1 \cdot 10 + 5 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000}$; $5 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 10 + 7 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$; $7 \cdot 1000 + 7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{1000}$. **8.** a) 5710,234; b) 5000,00007;
9. a) $\left\{\frac{7}{10}, \frac{1}{2}\right\}$; b) $\left\{\frac{17}{9}, \frac{84}{33}, \frac{131}{3}\right\}$; c) $\left\{\frac{16}{15}; \frac{263}{15}; \frac{7}{12}\right\}$; **10.** nu.

16. Ordinea efectuării operațiilor

1. a) 2,1437; b) 3,21; c) 238,05; d) 10,375; e) 100,11; f) 1258,7; g) 200,3; h) 3616,35; **2.** a) 15,6; b) 1,24; c) 1084,46; d) 26,26; e) 9,6; f) 0,75; g) 130,3; h) 40,24; i) 21,7; j) 509,2. **3.** a) 5,1424; b) 102,73; c) 13,516; d) 137,355; **4.** a) 2; b) 5,125; c) 0,413(8); d) 0,65; e) 7,85; f) 2,48; **5.** Da - la a), b), d) şi e). **6.** a) 4,5(3); b) 1,155; c) 0,9; d) 45; e) 1; f) 0,25; g) 15; **7.** a) 16; b) $1\frac{7}{123}$;

c) 5; d) 26207; e) 10,21; **8.** a) 0,05; b) 52,58(3); c) 0,80; d) 8,2(6); e) 32,4; **9.** a) 958,85; b) 65; **10.** 1.

17. Rezolvarea şi alcătuirea de ecuaţii, inecuaţii şi probleme care presupun operaţiile învăţate

1. a) 6,98; b) 112,59; c) 743,34; d) 297,36; e) 38,11; f) 116,35; g) 138,835; h) 201,85; i) 34,54; **2.** a) 67,593; b) 11,7(5); c) 2,(8); d) 14,11; e) 14,(4); f) 60,2(4); **3.** a) 5; b) 1,5; c) 8; d) 0,4; e) 8,(3); f) 41,44; g) 0,8; h) 27,(2); i) 3,75; **4.** a) 0,4; b) 0,5; c) 30; d) 28; e) 0,8; f) 250; **5.** a) $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $x \in \{0, 1, 2\}$; **6.** 0,49 şi 1,96; **7.** 2 şi 49,18. **8.** a) 110,043; b) 44,3; c) 2,52; d) 4,669; e) 3; f) 9,18; **9.** a) $x \in \{1, 2, 3\}$; b) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; c) $x \in \{1, 2, 3\}$; d) $x \in \{1, 2, 3\}$; e) $x \in \{1, 2\}$. **10.** Soluţiile sunt numere naturale la c) , d), e); **11.** a) 9; b) 20; c) 0,11; d) 4; e) 10; f) 4,5; **12.** a) 1,6; b) 0; c) 0; d) 0,5.

18. Media aritmetică a două sau mai multor numere; aplicaţii

1. 19; **2.** 53,3; **3.** $\frac{3}{7}$; **4.** a) 6,(6); b) 0,91(6); c) 1,0(2); d) 2,25; e) 0,48(3); f) 1,7125; **5.** 0,9; **6.** 8; **7.** 16,725 – 14,88 = 1,845; **8.** 275; **9.** a) x = 4,55, y = 59,375 şi m_a = 31,9625; b) x = 90; y = 22,63 şi m_a = 56,315; c) $x = \frac{11}{3}$ şi y = 1 şi m_a = 2,(3); **10.** 100; 102; 104; **11.** 4; 32; 76; **12.** 26,(3). **13.** 11,6; 23,4; 26,9; 17,9. **14.** 80; **15.** 14; **16.** a) 0,81; b) 1,74; c) 1,41; d) 21,9; e) 4,05; f) 6,1(6); **17.** 65,1; **18.** z > y > x.

19. Raport, procent

1. a) 5; b) $\frac{1}{5}$; **2.** a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; **3.** $\frac{1}{3}$; **4.** Preţul unui kilogram; **5.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{7}$; c) 35; d) $\frac{7}{5}$; e) de $1\frac{2}{5}$ ori; f) 140%; **6.** a) $\frac{2}{15}$; b) $\frac{7}{5}$; c) $\frac{15}{16}$; **7.** $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{70}$; $\frac{1}{15}$; **8.** $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$; **9.** L = 40; ℓ = 10; **10.** $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{1}{9}$; **11.** 0,5 şi 0,75; **12.** 40,15 şi 80,3; **13.** a) 47,1(6); b) 0,2; c) 137,5; d) 0,4; e) 0,2; f) 6,9(4); **14.** a) 2; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 16, 8, 24 şi respectiv 18, 9 şi 27; **15.** a) 2; b) de 2 ori; c) P_1 = 200; P_2 = 100 şi raportul perimetrelor este egal cu raportul lungimilor laturilor.

20. Mulţimea numerelor raţionale Q

1. a) $\frac{1}{4}; \frac{2}{9}; \frac{7}{30}$; b) $\frac{27}{2}; \frac{221}{99}; \frac{2096}{495}$; **2.** a) 0,5; 2,25; 0,07; b) 0,(3); 0,(2); 0,(36); **c)** 0,1(6); 0,2(7); 0,3(18); **3.** Presupunem că fracţia zecimală este număr raţional, deci fracţia este periodică. Fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada trebuie să conţină şi cifra 1. De aceea, între orice două unităţi consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de p–1 zerouri, contradicţie. **4.** a) 36,186; b) 2,97; c) 10,36; d) 0,24; e) 9,8; f) 1,4; g) 1,4; **5.** a) 6,5; b) 15; c) 1; d) 2; **6.** a) 0,5(4); b) 1,(31); c) 13,96; **7.** 2001; **8.** a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$; c) $\frac{31}{35}$; d) $\frac{32}{15}$; e) $\frac{3}{4}$; f) $\frac{9}{4} = 2{,}25$; **9.** $\frac{11}{4}$; **10.** x = 2; **11.** $x \in \{4, 10\}$; **12.** Presupunem că $p = \frac{2n+3}{5}$ şi $q = \frac{3n+4}{5}$ sunt naturale; atunci $q - p = \frac{n+1}{5} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow n = 5k + 1$, $k \in \mathbf{N}^*$, deci $q = \frac{15k+7}{5} \in \mathbf{N} \Rightarrow q =$ $= 3k + 1 + \frac{2}{5} \in \mathbf{N}$, absurd.

13. $A = \frac{10000a + 1000b + 100b + 10a + b - 100b}{7} = \frac{10010a + 1001b}{7} =$

$= \frac{10010a}{7} + \frac{1001b}{7} = 1430a + 143b \in \mathbf{N}$ şi analog

$A = \frac{10010a}{11} + \frac{1001b}{11} = 910a + 91b \in \mathbf{N}$. **14.** de 2 ori; **15.** 3.000 lei în fiecare zi; **16.** A = {3, 5, 11}; **17.** x = 42; **18.** xy = 2500; **19.** x = 15, y = 9, x + y = = 24; **20.** a = 6, p = 36.

21. Probleme recapitulative

1. a) 13; b) 12. **2.** a) 10; b) 7; c) 0; d) 2. **3.** a) 6; b) 0; c) 2; d) $1\frac{1}{4}$. **4.** a) 112; b) 11,2; c) 11,2; d) 1,12. **5.** a) 2; b) 1; c) $\frac{1}{7}$. **6.** a) 5050; b) 2500; c) 2550; d) 385. **7.** a) $4\frac{11}{12}$; b) $4\frac{1}{2}$. **8.** a) 2; b) 6; c) 1. **9.** a) $2\frac{2}{7}$; b) $179\frac{11}{32}$; c) 2,(6); d) $\frac{1}{2}$. **10.** a) 1; b) 2; c) 1; d) 1; e) 9. **11.** a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot$

$\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{3-1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2001-1}{2001}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{1999}{2000}\cdot\frac{2000}{2001}=\frac{1}{2001}$;

b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2001}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{2001}=\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)^{2001}=1^{2001}=1$; c) Se compară 2^{171} cu 3^{114} şi avem $2^{171}=2^{3\cdot57}=(2^3)^{57}=8^{57}$, $3^{114}=3^{2\cdot57}=(3^2)^{57}=9^{57}$, $8^{57}<9^{57}\Rightarrow 2^{171}<3^{114}$ şi $2^{171}-3^{114}<0\Rightarrow|2^{171}-3^{114}|=-2^{171}+3^{114}\Rightarrow(2^{171}-2^{171}+3^{114}):(32-4-1)^{37}=3^{114}:27^{37}=3^{114}:(3^3)^{37}=3^{114}:3^{3\cdot37}=3^{114}:3^{111}=3^3=27$.

12. Dacă a, b, c, d şi e sunt cifre în baza 10 $\Rightarrow \frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1000}+\frac{d}{10000}+\frac{e}{100000}=0,\overline{abcde}=\frac{\overline{abcde}}{100000}$. Cum $\frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1000}+\frac{d}{10000}+\frac{e}{100000}=\frac{12201}{12500}\Rightarrow\frac{\overline{abcde}}{100000}=\frac{^{8}12201}{12500}=\frac{97608}{100000}\Rightarrow a=9, b=7, c=6, d=0, e=8$, $\overline{ab}=97$, $\overline{ae}=98$ şi $\left(\overline{ab}^{c}+\overline{ae}^{c}\right)^{d}:e=\left(97^6+98^6\right)^0:8=1:8=\frac{1}{8}=0,125$.

13. $\frac{\overline{2a3b}}{\overline{a1b}}$ se simplifică cu 15 $\Leftrightarrow 15\mid\overline{2a3b}$ şi $15\mid\overline{a1b}$; $15\mid\overline{a1b}\Leftrightarrow 5\mid\overline{a1b}$, $3\mid\overline{a1b}$ şi $(5,3)=1$; $5\mid\overline{a1b}\Rightarrow b\in\{0,5\}$ şi $\overline{a1b}\in\{\overline{a10},\overline{a15}\}$; $3\mid\overline{a10}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\mid(a+1)\Rightarrow a\in\{2,5,8\}\Rightarrow\overline{a10}\in\{210,510,810\}$; $3\mid\overline{a15}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\mid(a+1+5)\Leftrightarrow 3\mid(a+6)\Rightarrow a\in\{0,3,6,9\}$, dar $a\neq0\Rightarrow\overline{a15}\in\{315, 615, 915\}\Rightarrow 15\mid\overline{a1b}\Leftrightarrow\overline{a1b}\in\{210, 510, 810, 315, 615, 915\}$ şi analog $15\mid\overline{2a3b}\Leftrightarrow\overline{2a3b}\in\{2235, 2535, 2835\}\Rightarrow$ cea mai mică fracţie este $\frac{210}{2835}$, iar cea mai mare este $\frac{915}{2235}$.

14. a) $\frac{(100a+10a+a)+(100b+10b+b)+(100c+10c+c)}{(100a+10b+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b)}=\frac{111a+111b+111c}{111a+111b+111c}=$ $=\frac{111(a+b+c)}{111(a+b+c)}=1$; b) În baza 2 avem

$\frac{(a\cdot2^2+a\cdot2+a+b\cdot2^2+b\cdot2+b+c\cdot2^2+c\cdot2+c)_{10}}{(a\cdot2^2+b\cdot2+c+b\cdot2^2+c\cdot2+a+c\cdot2^2+a\cdot2+b)_{10}}=\frac{7(a+b+c)}{7(a+b+c)}=1$;

c) În baza x avem

$\frac{(a\cdot x^2+a\cdot x+a+b\cdot x^2+b\cdot x+b+c\cdot x^2+c\cdot x+c)_{10}}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c+b\cdot x^2+c\cdot x+a+c\cdot x^2+a\cdot x+b)_{10}}=$

$=\frac{a(x^2+x+1)+b(x^2+x+1)+c(x^2+x+1)}{(a+b+c)x^2+(a+b+c)x+(a+b+c)}=\frac{(x^2+x+1)(a+b+c)}{(a+b+c)(x^2+x+1)}=1$.

15. Fie a, b, c numere naturale prime, distincte două câte două şi fie $a<b<c$ $\Rightarrow a\geq2\Rightarrow\frac{1}{a}\leq\frac{1}{2}$; $b\geq3\Rightarrow\frac{1}{b}\leq\frac{1}{3}$ şi $c\geq5\Rightarrow\frac{1}{c}\leq\frac{1}{5}$.

Calculăm $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)$. Dar $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{10}=\frac{14}{45}$. Dar $\frac{14}{45}<\frac{15}{45}$ şi $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$. **16.** 0.

18. a) Avem: $2^{21}=2^{3\cdot7}=(2^3)^7=8^7$, $3^{14}=3^{2\cdot7}=(3^2)^7=9^7$ şi cum $8^7<9^7\Rightarrow$ $\Rightarrow a+8^7<a+3^{14}\Rightarrow\frac{a+2^{21}}{a+3^{14}}<1$ $\left(\frac{a+2^{21}}{a+3^{14}}\right.$ este fracţie subunitară) şi analog se arată că $\frac{b+2^{24}}{b+3^{12}}>1$ $\left(\frac{b+2^{24}}{b+3^{12}}\right.$ este fracţie supraunitară) $\Rightarrow x<y$;

b) Pentru $a=b=0\Rightarrow x=\frac{2^{21}}{3^{14}}, y=\frac{2^{24}}{3^{12}}$ şi $\frac{x}{y}=\frac{2^{21}}{3^{14}}:\frac{2^{24}}{3^{12}}=\frac{2^{21}}{3^{14}}\cdot\frac{3^{12}}{2^{24}}=$ $=\frac{1}{2^3\cdot3^2}=\frac{1}{72}$. Cum $\frac{1}{72}<\frac{1}{70}\Rightarrow\frac{x}{y}<\frac{1}{2\cdot5\cdot7}$. **19.** $\frac{x-3}{5}\in\mathbf{N}\Rightarrow x-3=5k$ $\Rightarrow x=5k+3\Rightarrow$ ultima cifră a lui x este 3 sau 8 după cum k este par sau impar $\Rightarrow$ x nu poate fi pătrat perfect. **20.** a) $xy+xz+yz=$ $=\frac{a+2b}{1+3b}\cdot\frac{1+3b}{4}+\frac{a+2b}{1+3b}\cdot\frac{4}{a+2b}+\frac{1+3b}{4}\cdot\frac{4}{a+2b}=\frac{a+2b}{4}+\frac{4}{1+3b}+\frac{1+3b}{a+2b}=$ $=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$; b) Cum $x\cdot y\cdot z=\frac{a+2b}{1+3b}\cdot\frac{1+3b}{4}\cdot\frac{4}{a+2b}=1$ şi x, y şi z sunt simultan naturale $\Rightarrow x=y=z=1$ şi $\frac{a+2b}{1+3b}=1\Rightarrow a+2b=1+3b$ $\Rightarrow a=b+1$ (1); $\frac{1+3b}{4}=1\Rightarrow1+3b=4\Rightarrow3b=3\Rightarrow b=1$ şi $a\overset{(1)}{=}b+1=$ $=2\Rightarrow a=2$ şi $b=1$. **21.** a) $\frac{7}{2x-1}$ este subunitară $\Rightarrow\frac{7}{2x-1}<1\Rightarrow2x-1>$

$> 7 \Rightarrow 2x > 8 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x \in \{5, 6, \ldots\}$; b) $\frac{7}{2x-1} \in \mathbf{N} \Rightarrow 2x - 1 \in \{1, 7\}$

$\Rightarrow 2x \in \{2, 8\} \Rightarrow x \in \{1, 4\}$; c) $x = 3$; d) $\frac{7}{2x-1}$ este supraunitară $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7}{2x-1} > 1 \Rightarrow 2x - 1 < 7 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$.

22. a) $\frac{{}^{3y}1}{2x} - \frac{{}^{2x}1}{3y} = \frac{1}{xy} \Rightarrow 3y - 2x = 6 \quad (1) \Rightarrow 3y = 2x + 6 = 2(x + 3) \Rightarrow y \in$

$\in \mathcal{M}_2 \Rightarrow y = 2a$. Analog, $2x = 3(y - 2) \Rightarrow x \in \mathcal{M}_3 \Rightarrow x = 3b \overset{(1)}{\Rightarrow} 6a - 6b = 6$

$\Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$, $y = 2(b + 1)$, $x = 3b \cdot \frac{y}{x+3} = \frac{2b+2}{3b+3} = \frac{2(b+1)}{3(b+1)} = \frac{2}{3} \approx$

$\approx 0{,}67$; b) $x \cdot y = 2 \cdot 3b(b + 1) = 6b(b + 1)$ şi cum $b(b + 1)$ este produsul a două numere consecutive şi este divizibil cu $2 \Rightarrow x \cdot y \vdots (2^2 \cdot 3)$, adică numere consecutive $x \cdot y \vdots 12$; c) $\frac{1}{y+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{2b+4} - \frac{1}{3b+6} =$

$= \frac{{}^{3}1}{3(b+2)} - \frac{{}^{2}1}{3(b+2)} = \frac{1}{6(b+2)} = \frac{1}{18} \Rightarrow 6(b + 2) = 18 \Rightarrow b + 2 = 3 \Rightarrow b = 1$,

$a = b + 1 = 2$, $x = 3b = 3$ şi $y = 2a = 2 \cdot 2 = 4$. **23.** a) $x = 1{,}5$; b) $x = 0{,}8$; c) $x =$ $= 2$; d) $x = 2$; e) $x = 100$; f) $x = 36$; g) $x = 117{,}6$; h) $x = 0{,}8$; i) $x = 2$; j) $x = 5$.

24. $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{{}^{b+2}2}{3} - \frac{{}^{3}1}{b+2} = \frac{2b+4-3}{3b+6} = \frac{2b+1}{3b+6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a+1}{1} = \frac{3b+6}{2b+1} \Rightarrow a = \frac{3b+6}{2b+1} - 1 = \frac{3b+6-2b-1}{3b+1} = \frac{b+5}{3b+1}$. Dar $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \{0, 2\} \Rightarrow a \in \{5, 1\}$. **25.** a) $\frac{7}{15} < \frac{1}{x} < \frac{7}{13} \Leftrightarrow \frac{7}{15} < \frac{7}{7x} < \frac{7}{13} \Leftrightarrow 13 < 7x <$

$< 15 \Leftrightarrow \frac{13}{7} < x < \frac{15}{7}$. Dar $x \in \mathbf{N} \Rightarrow x = 2$;

b) $\overline{0,(11x)} + \overline{0,(22x)} + \overline{0,(33x)} + \ldots + \overline{0,(99x)} = \frac{\overline{11x}}{999} + \frac{\overline{22x}}{999} + \frac{\overline{33x}}{999} + \ldots + \frac{\overline{99x}}{999} =$

$= \frac{\overline{11x} + \overline{22x} + \overline{33x} + \ldots + \overline{99x}}{999} = \frac{110 \cdot 9 \cdot 5 + 9x}{999} = \frac{9 \cdot (110 \cdot 5 + x)}{999} = \frac{550 + x}{111}$.

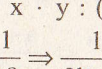
Dar $\frac{550+x}{111} = x \Rightarrow 550 + x = 111x \Rightarrow 550 = 110x \Rightarrow x = 5$;

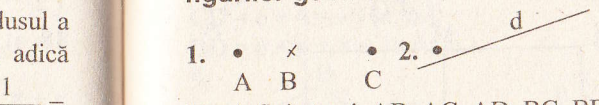
c) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}} = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{3} \Rightarrow$

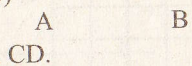
$\Rightarrow \frac{2x+1+x+1}{2x+1} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3x+2}{2x+1} = \frac{5}{3} \Rightarrow 9x + 6 = 10x + 5 \Rightarrow x = 1$.

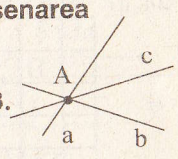
CAPITOLUL ELEMENTE DE GEOMETRIE ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

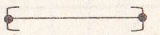
1. Figuri geometrice. Instrumentele geometrice. Desenarea figurilor geometrice

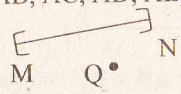
1. 

2. 

b) 

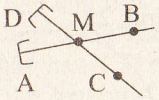
3. 

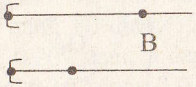
b) o infinitate. **4.** AB, AC, AD, BC, BD, CD.
5. AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. **6.** 

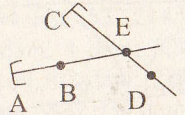
7. 

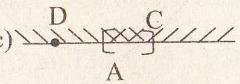
8. b) Punctele sunt: A, B, C, D, E, F, P, Q;
dreptele sunt: CD şi d; segmentele sunt: (A, B) şi (E, F). **9.** a) $M \notin AB$;
b) $C \in [AB]$; c) $B \notin [AC]$; d) $N \notin (AC)$.
10.

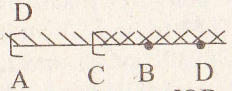
11.

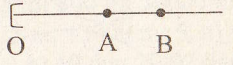
12. 

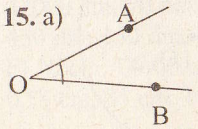
$M \in [AB$ şi $M \in [DC$, adică $[AB \cap [DC = \{M\}$.
13. a) 

b) 

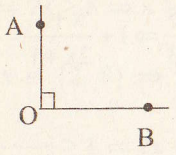
c) 

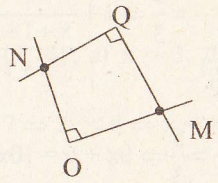
d) 

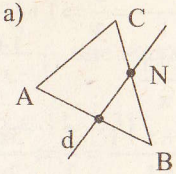
14. 

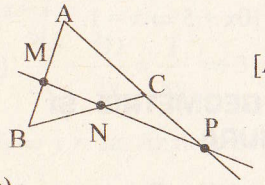
$B \in [OA \Rightarrow [OA = [OB$ citim semidreapta $[OB$.
15. a) 

vârful O şi laturile $[OA$ şi $[OB$. **16.** a), b), c), d), e), f) sunt corecte. **17.** Nu, deoarece sunt trei unghiuri care ar putea fi notate cu $\sphericalangle B$ şi anume: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ABD$, şi $\sphericalangle CBD$ şi nu am şti la care din ele se referă. **18.** $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPD$, $\sphericalangle DPE$, $\sphericalangle EPF$, $\sphericalangle FPA$, $\sphericalangle APC$, $\sphericalangle APD$, $\sphericalangle CPE$, $\sphericalangle DPF$, $\sphericalangle EPA$, $\sphericalangle BPD$.

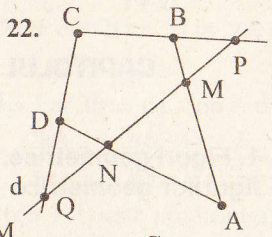
19. 

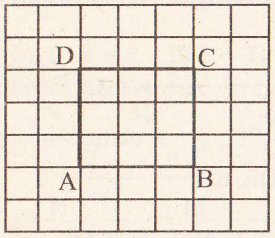
20. 

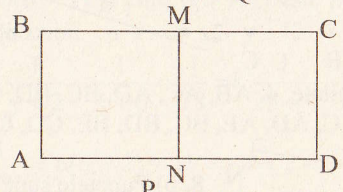
21. a) 

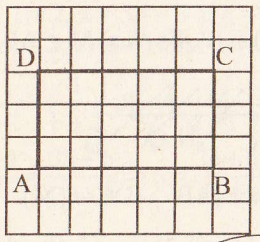
b) 

$[AC \cap [PA = [AP]$.

22. 

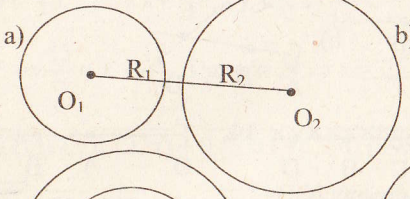
24. a) 

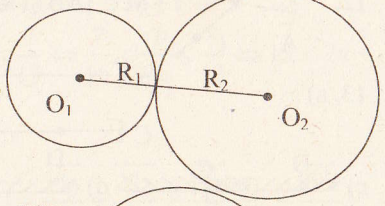
25. 

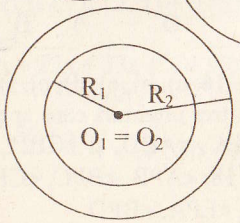
b) 

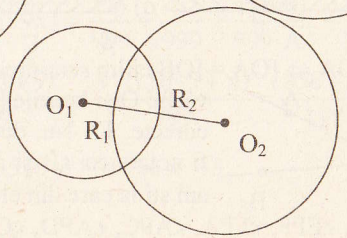
26. $P = 12 \Rightarrow p = \frac{P}{2} = 6$ şi $AB + BC = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2 + BC = 6 \Rightarrow BC = 4$ şi se desenează dreptunghiul cu lungimea 4 cm şi lăţimea 2 cm.

27. $P = 12$ cm şi $P = 4\ell \Rightarrow 4\ell = 12 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell = 3$ cm. **28.** egal; centrul; 2.

29. a) 

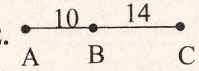
b) 

d) 

c) 

33. a) 25,12 cm; b) 31,4 cm; c) 9,42 cm. **34.** a) 3 cm; b) 6 cm; c) 4,5 cm.

2. Măsurarea segmentelor

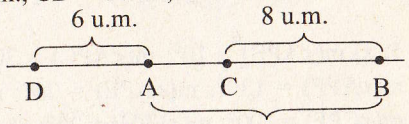
1. 1 dată; de 2 ori; de 3 ori; de 1,5 ori. **2.** 

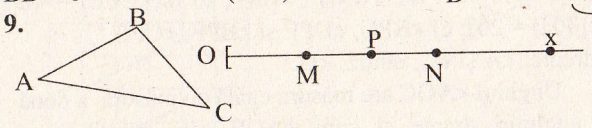
$AC = AB + BC =$ $= 10 + 14 = 24$ (u.m.). **3.** Fie x lungimea segmentului [AB]. Avem $3x - 25 =$ $= \frac{x}{2} \Rightarrow x = 10$. **4.** Fie x lungimea segmentului [MN]. Avem $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 96$ şi rezolvând ecuaţia obţinem $x = 128$.

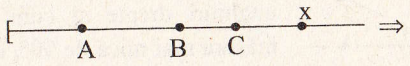
5.

6. $AB = 6CD$; $AB = 4DE$. **7.** $BC = 3$ u.m., $CD = 4$ u.m., $AD = 8$ u.m.

8. $AC = 12 - 8 = 4$ (u.m.);
$CD = 6 + 4 = 10$ (u.m.);
$BD = 6 + 4 + 8 = 18$ (u.m.).



9. 

$AB + BC > AC$. **10.** 

$\Rightarrow$
$\Rightarrow OC + AB = OB + AC$.

3. Unităţi de măsură pentru lungimi, transformări

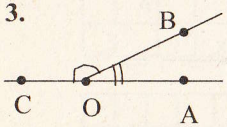
1. a) 2 km; 0,8 km; 0,12 km; 0,0112 km; 120 km; 53, 4 km; b) 0,9 km; 0,936 km; 12,5 km; 0,145 km; 739 km; 124,9 km; c) 12,5 km; 1,45 km; 5,37 km; 7,29 km; 0,135 km; 9,3455 km. **2.** a) 130 hm; 0,145 hm; 1,05 hm; 9,9 hm; 60,0484 hm; 1,739 hm; b) 9,045 hm; 170 hm; 3,62109 hm; 0,25 hm; 12,7 hm; 0,5 hm; c) 47,5 hm; 92 hm; 0,00094 hm; 537,2145 hm; 4,12 hm; 3798240 hm. **3.** a) 5 dam; 80 dam; 1030 dam; 4 dam; 0,8 dam; 7,5 dam; b) 2,45 dam; 73 dam; 0,207 dam; 5 dam; 160,702 dam; 217,12 dam; c) 3,9 dam; 1820 dam; 6 dam; 0,157 dam; 3,02 dam; 5432,937 dam. **4.** a) 12000 m; 1,005 m; 40 m; 350 m; 210 m; 1,37 m; b) 2507 m; 2,5 m; 800 m; 10000 m; 1,3 m; 130 m; c) 2,504 m; 13 m; 180 m; 40,237 m; 9,75 m; 13000 m. **5.** a) 4 dm; 27,5 dm; 2,75 dm; 10350 dm; 12100,3 dm; 850 dm; b) 40 dm; 10,02 dm; 42000 dm; 70 dm; 58,2 dm; 92 dm; c) 2,75 dm; 124000 dm; 0,4 dm; 720 dm; 450 dm; 150 dm. **6.** a) 75 cm; 2,5 cm; 30,6 cm; 1,056 cm; 10550 cm; 75 cm; b) 20 cm; 14000 cm; 22,55 cm; 3500 cm; 7,5 cm; 25 cm; c) 5,05 cm; 500 cm; 0,55 cm; 85 cm; 10 cm; 2 cm. **7.** a) 2000 mm; 15000 mm; 730 mm; 8000 mm;

65000 mm; 15000 mm; b) 3210 mm; 4000 mm; 1002 mm; 31000 mm; 100 mm; 1500 mm; c) 1240 mm; 710000 mm; 4500 mm; 120000 mm; 32100 mm; 9550 mm. **8.** Fie x lățimea și 2x lungimea $\Rightarrow$ P = 0,54 dam $\Rightarrow$ (x + 2x) · 2 = = 0,54 $\Rightarrow$ ℓ = 0,9 m și L = 1,8 m. **9.** P = 3 cm + 0,0004 hm + 0,05 m = 3 cm + + 4 cm + 5 cm = 12 cm $\Rightarrow$ 12 cm = 4 ℓ $\Rightarrow$ ℓ = 3 cm. **10.** P = 100 mm = 10 cm $\Rightarrow p = \frac{P}{2}$ = 5 cm $\Rightarrow$ ℓ + L = 5 cm $\Rightarrow$ L = 4 cm și ℓ = 1 cm. **11.** 875 · 3 = 2625 (m) de sârmă necesară; 30 · 0,1 km = 30 · 100 m = 3000 m sârmă cumpărată și 3000 – 2625 = 375 (m) sârmă rămasă. **12.** 2,75 dam · 6 = 27,5 · 6 m = 165 m sârmă sunt necesari; 165 · 5500 = 907500 (lei) costă sârma. **13.** a) mm; b) cm; c) m; d) hm; e) km. **15.** D – C – B – A – E – A – D.

4. Măsurarea unghiurilor

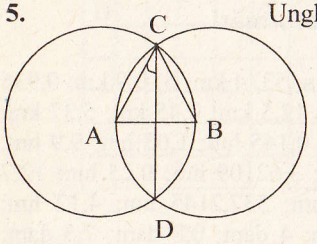
1. a) m(∢APB) = 10°; m(∢APC) = 30°; m(∢APD) = 50°; m(∢APH) = 150°; m(∢APF) = 130°; m(∢APE) = 70°; m(∢APG) = 180°; b) m(∢CPE) = 40°; m(∢CPF) = 100°; m(∢FPH) = 20°; c) ∢BPC, ∢DPE și ∢BPF, ∢CPG.
2. ascuțite: ∢B și ∢E; drepte: ∢A și ∢C; obtuz: ∢D.

3.



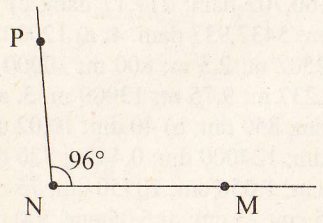
Unghiul ∢AOC are măsura egală cu măsura a două unghiuri drepte și cum ∢AOB este ascuțit și are măsura mai mică de 90°, celălalt are măsura mai mare de 90° și ca urmare este obtuz. **4.** m(∢BAC) = 45°.

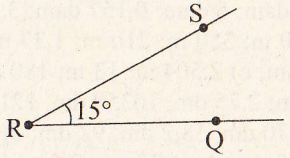
5.



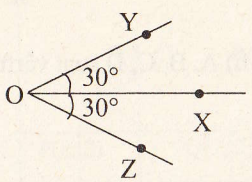
Unghiurile triunghiului ABC au câte 60° fiecare, iar ∢ACD are 30°. **6.** b) 1,2° = 72' = 4320"; c) 1,02° = 61,2' = 3672"; d) 1,6° = 96' = 5760"; e) 80,1° = 4806' = 288360"; f) 90,5° = 5430' = = 325800". **7.** Fie x măsura unghiului $\Rightarrow$ 2x + + 30° = 3 · 35° $\Rightarrow$ x = 37°30' = 37,5°.

8.

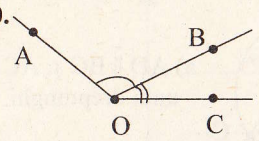




9.



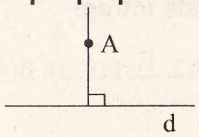
10.



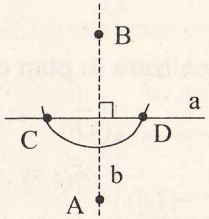
∢AOC are măsura egală cu suma măsurilor unghiurilor ∢AOB și ∢BOC.

5. Drepte perpendiculare. Drepte paralele

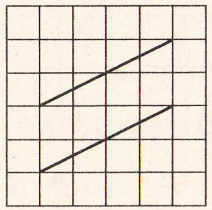
1.



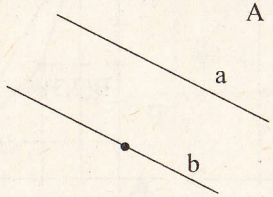
2. BA ⊥ CD $\Leftrightarrow$ a ⊥ b.



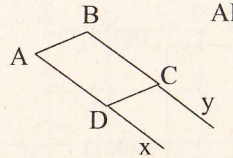
3.



4.

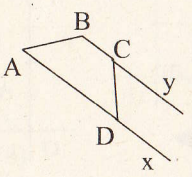


5.



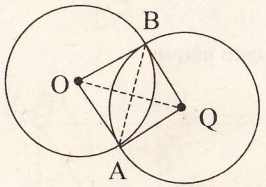
ABCD este paralelogram

6.



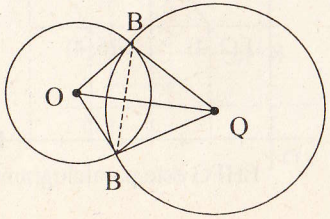
ABCD este trapez.

7.

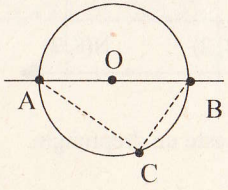


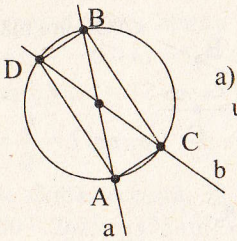
a) AO = OB = AQ = BQ = r;
b) AOBQ este romb.

8.



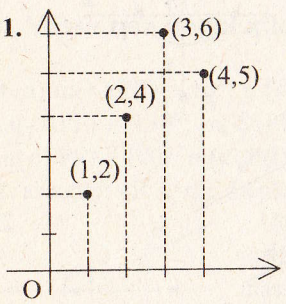
9.

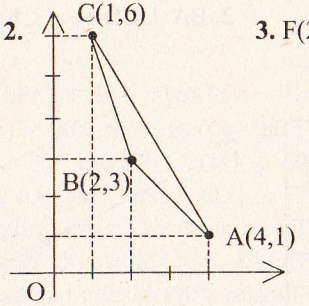


10. 

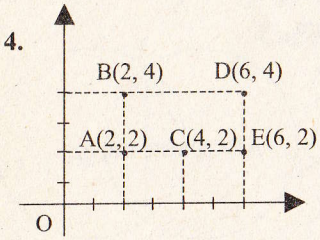
a) AD ∥ BC şi AC ∥ BD; b) A, B, C, D sunt vârfurile unui dreptunghi.

6*. Localizare în plan a unui punct de coordonate întregi

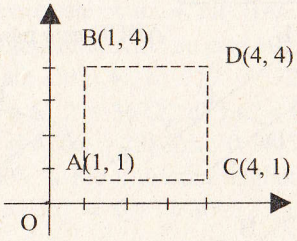
1. 

2. 

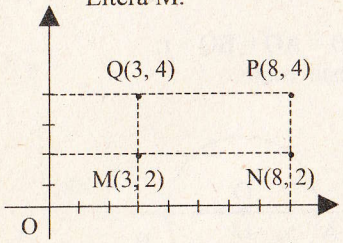
3. F(2, 2); E(9, 3); B(4, 6).

4. 

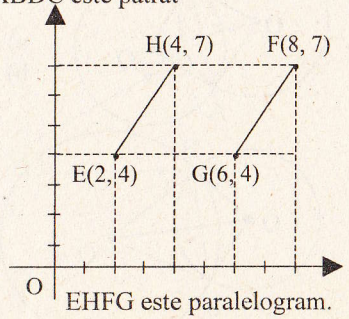
Litera M.

5. 

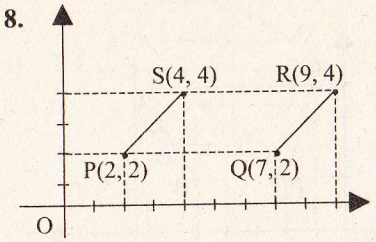
ABDC este pătrat

6. 

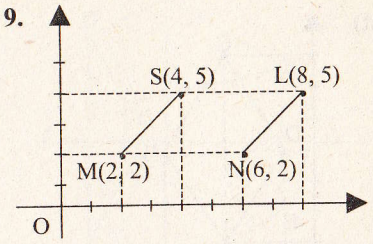
MNPQ este un dreptunghi.

7. 

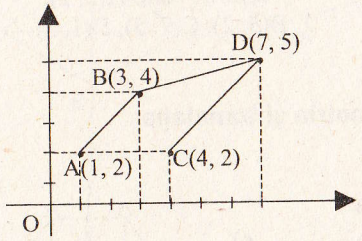
EHFG este paralelogram.

8. 

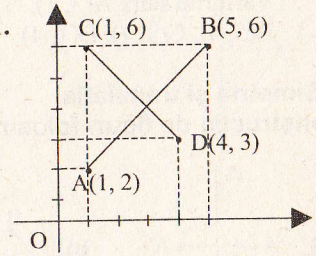
PQRS este paralelogram.

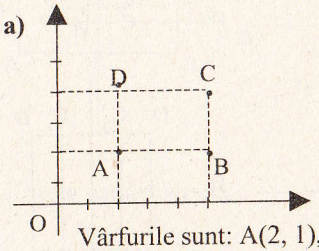
9. 

MNLS este paralelogram.

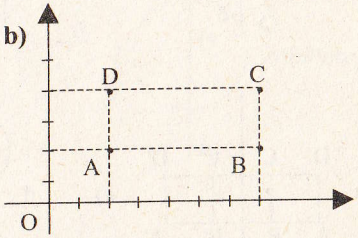
10. 

ABCD este trapez. AB ∥ CD.

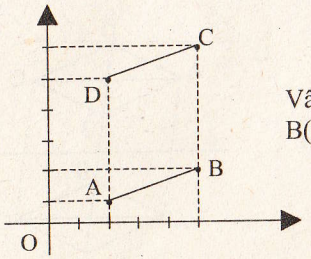
11. 

12. a) 

Vârfurile sunt: A(2, 1), B(5, 1), C(5, 4), D(2, 4).

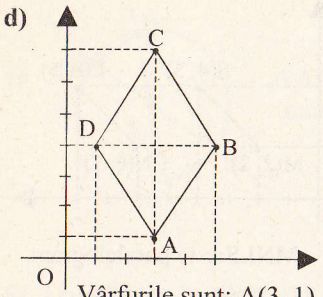
b) 

Vârfurile sunt: A(2, 2) B(7, 2), C(7, 4), D(2, 4).

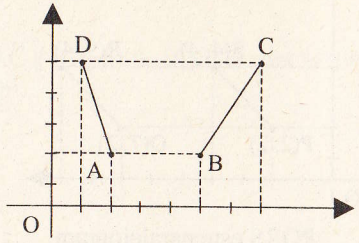
c) 

Vârfurile sunt: A(2, 1), B(5, 2), C(5, 6), D(2, 5)

d)



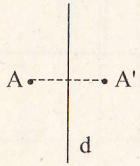
Vârfurile sunt: A(3, 1), B(5, 4), C(3, 7), D(1, 4).



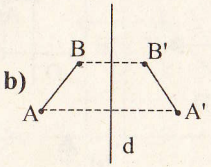
Vârfurile sunt: A(2, 2), B(5, 2), C(7, 5), D(1, 5)

7. Simetria şi translaţia (construcţia de figuri folosind simetria şi translaţia

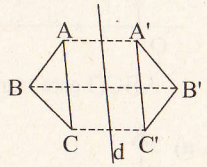
1.a)



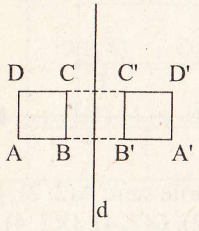
b)



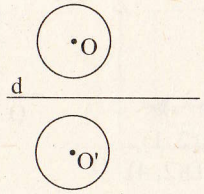
c)



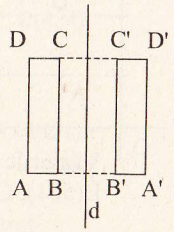
d)



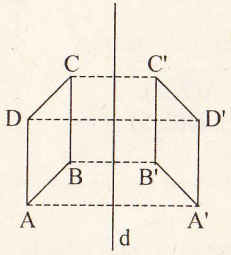
e)



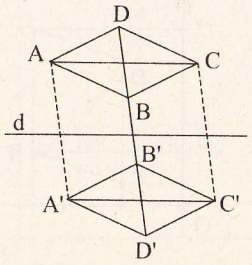
f)



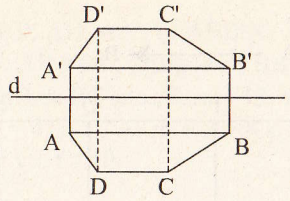
g)



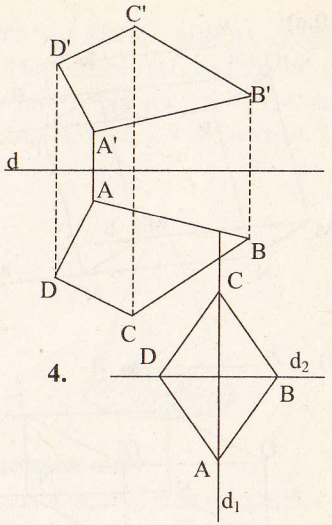
h)



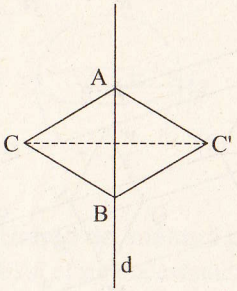
i)



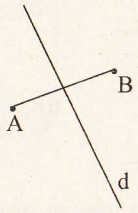
j)



2.

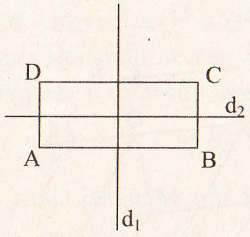


3.

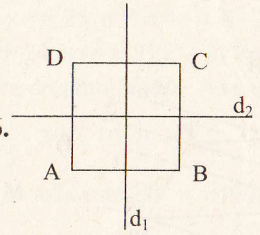


4.

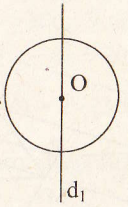
5.



6.



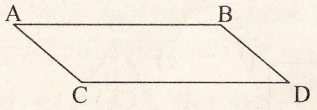
7.



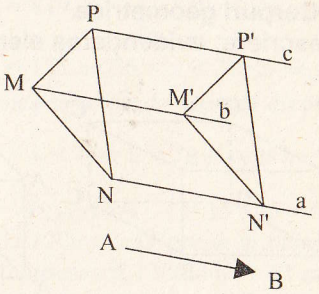
O infinitate.

ABCD este paralelogram.

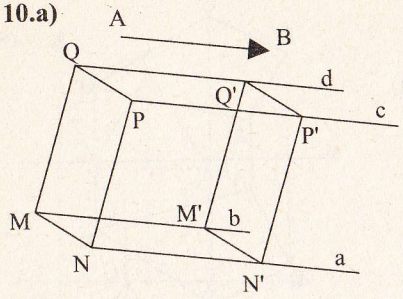
8.



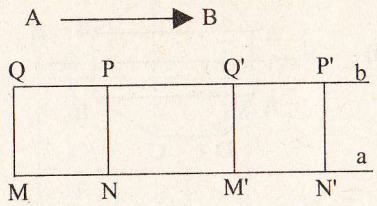
9.



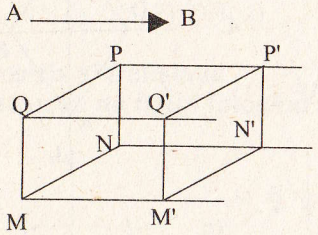
10.a)



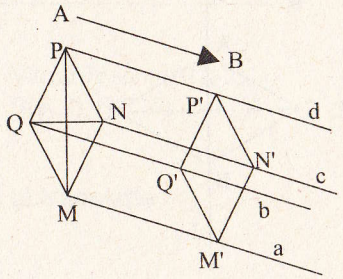
b)



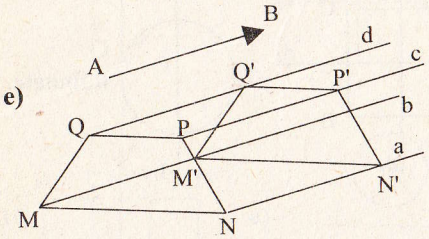
c)



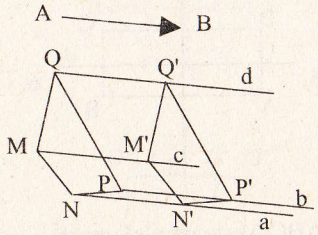
d)



e)

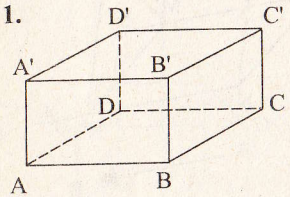


f)

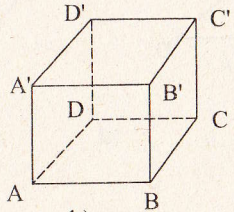


8. Corpuri geometrice (descriere; evidențierea elementelor: vârfuri, muchii, fețe)

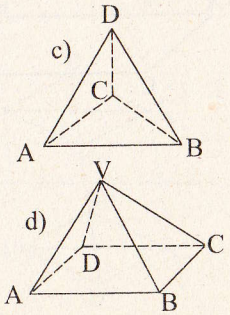
1.



a)

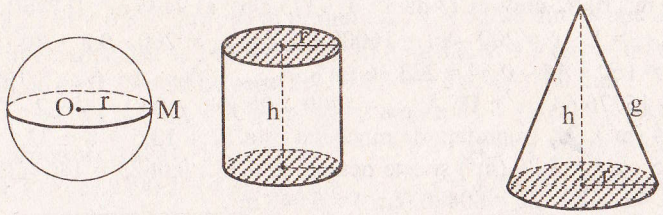


b)



2. a) AB, AD, AA'; b) ABB'A', ABCD, ADD'A'; c) ABCD, ABB'A'; d) AB || || A'B', AB || DC, AB || D'C', BB' || AA', DD' || CC' etc.; e) AB cu DD', BC cu AA', AB cu CC' etc.; **3.** m = 12, v = 8, f = 6 ⇒ m + 2 = 14 şi v + f = 14; **4.** m = = 6, v = 4, f = 4 ⇒ m + 2 = 8 şi v + f = 8; **5.** m = 8, f = 5 şi v = 5 ⇒ m + 2 = = 10 şi v + f = 10.

6.

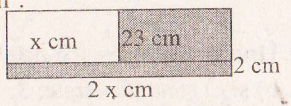


9. Unități de măsură pentru suprafețe; transformări

1. b) şi c) sunt adevărate; **3.** b) şi d) sunt corecte; **4.** a) şi c) sunt uzuale; **5.** ℓ = = (45 + 75) : 2 = 120 : 2 = 60 şi a) P = 4 · 60 = 240 şi A = $\ell^2 = 60^2 = 3600$; **6.** A = 625 m^2 ⇒ $\ell^2 = 25^2$ ⇒ ℓ = 25 şi P = $4\ell = 4 \cdot 25 = 100$; **7.** 7 cm; **8.** Fie ℓ latura pătratului. Avem: $\ell^2 + 24 = (\ell + 3)(\ell - 2)$ ⇒ ℓ = 30m; **9.** a) Fie L şi ℓ lungimea şi respectiv lățimea dreptunghiului. Avem $3(L - \ell) + 20 = 2(L + \ell)$ şi $\ell = \frac{1}{3}L \Rightarrow L = 30$ şi $\ell = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$; b) $P = 2 \cdot (L + \ell) = 2 \cdot (30 + 10) = 80$ ⇒ latura pătratului este 80 şi aria este $80^2 = 6400$. Aria dreptunghiului este $L \cdot \ell = 30 \cdot 10 = 300$; **10.** $P = 2 \cdot (L + \ell) = 2730$ şi $\ell = \frac{1}{3} \cdot 2L = \frac{2}{3}L \Rightarrow 2 \cdot \left(L + \frac{2}{3}L\right) = 2730 \Rightarrow 10L = 2730 \cdot 3 \Rightarrow L = 819$, $\ell = \frac{2}{3} \cdot 819 = 546$ şi A = = 819 · 546 = 447174; **11.** a) Din $144 < 4x < 153 \Rightarrow 36 < x < 38{,}25 \Rightarrow x \in$ ∈ {37, 38}; b) ℓ = 37; **12.** Fie L şi ℓ lungimea şi respectiv lățimea dreptunghiului $\Rightarrow \ell = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot (L + \ell) = \frac{L + \ell}{4} \Rightarrow 4\ell = L + \ell \Rightarrow L = 3\ell$ şi cum $L - \ell =$ = 30 ⇒ $3\ell - \ell = 30 \Rightarrow 2\ell = 30 \Rightarrow \ell = 15$, L = 45 şi A = L · ℓ = 15 · 45 = 675; **13.** Pentru a acoperi 1200dm^2 este nevoie de 1200 bucăți gresie şi numărul cutiilor este 1200 : 50 = 24. Dar 1200 plăcuțe înseamnă 1200 dm^2 = 12 m^2 şi cum 1 m^2 costă 65560 ⇒ 12m^2 costă 65560 · 12 = 786720 (lei); **14.** 728,458 m^2; 735,2492 m^2; 932,758 m^2; 529,459 m^2; **15.** 50 cm^2; 3000 cm^2; **16.** 3600 mm^2; 13007500 mm^2; **17.** 2650 m^2; 326,58 m^2; 1,5625 m^2; **18.** 14,26 ha, 85 ha;

19. 14008,2 m^2 = 1400820 dm^2 = 140,082 dam^2 = 1,40082 hm^2 = 1,40082 ha; **20.** 281,004 dam = 28100,4 m^2 = 2810040 dm^2 = 281004000 cm^2 = 281,004 ari; **21.** a) 2400 + 362500 + 275 = 365175 (m^2); 92,3 + 27,6325 + 4800 = = 4919,9325 (m^2); 32625 – 7200 = 25425 (m^2); 2,75 – 0,3225 = 2,4275 (m^2); b) 74500 – 452 + 72,5 = 74120,5 cm^2; 1250 – 135 + 12010 = 13125 cm^2; 370100 – 2157 – 12,34 = 367930,66 cm^2; 124,56 + 1230 + 17200 = 18554,56 cm^2; **22.** a) 97,5 m^2; b) 52 dm^2; c) 73 dam^2; d) 9375 cm^2; e) 9405 m^2; f) 7450 cm^2; **23. I)** $A_{grădină} = L \cdot \ell = 200 \cdot 80 = 16000$ (m^2); $A_{alee} = 200 \cdot 0{,}8 + 80 \cdot 0{,}8 -$ $- 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 160 + 64 - 0{,}64 = 223{,}36$ (m^2); $A_{gazon} = A_{grădină} - A_{alee} = 16000 -$ $- 223{,}36 = 15776{,}64$ (m^2); **II)** $A_{gazon} = (200 - 0{,}8)(80 - 0{,}8) = 199{,}2 \cdot 79{,}2 =$ = 15776,64 (m^2); **24.** Suprafața de mochetat este 12 + 13,5 + 8 = 33,5 (m^2); **25.** $A = 3{,}5 \cdot 2{,}5 = 8{,}75$ (m^2) și este nevoie de 8,75 : 0,0625 = 140 (plăci de gresie); **26.** $42 \cdot 12 \cdot 120 = 60480$ (cm^2) = 6,048 m^2.

27. $2 \cdot 2x + 23x = 1215 \Rightarrow 4x + 23x = 1215 \Rightarrow$
$\Rightarrow 27x = 1215 \Rightarrow x = 45$ (cm).



10. Unități de măsură pentru volum, transformări

1. a) 40000 mm^3; $7 \cdot 10^9$ mm^3; $933 \cdot 10^8$ mm^3; $8 \cdot 10^7$ mm^3; $23 \cdot 10^8$ mm^3; $42 \cdot$ $\cdot 10^{10}$ mm^3; **2.** 8 cm^3; 3,145 cm^3; 69400 cm^3; 40200 cm^3; 420000000 cm^3; 51820000 cm^3; **3.** 90000000 dm^3; 35000 dm^3; 0,3045 dm^3; 6.370.000.000 dm^3; 0,014 dm^3; 540 dm^3; **4.** 18000000 m^3; 0,415 m^3; 0,001476 m^3; 5000000 m^3; 3,25 m^3; 0,0045 m^3; **5.** 0,0035 dam^3; 7,3 dam^3; 0,003425 dam^3; 0,17 dam^3; 0,0354 dam^3;0,0036254 dam^3; **6.** 45000 hm^3; 93 hm^3; 0,000008 hm^3; **7.** 7,5 km^2; 0,0000000825 km^2; 8,5 km^3; 0, 00000010215 km^3; 0,000000452 km^3; 0,00075 km^3. **8.** a) 8 cm^3; b) 432 cm^3; c) 48 cuburi; d) de 54 de ori; e) Nu, deoarece la c) considerăm ca bază a paralelipipedului de exemplu dreptunghiul cu dimensiunile de 6 cm și 9 cm și se pot așeza 12 cuburi. Cum înălțimea este 9 cm, putem așeza 4 rânduri și mai rămâne spațiu liber. Deci încap $12 \cdot 4 = 48$ (cuburi), iar la d) calculăm de câte ori se cuprinde volumul cubului în volumul paralelipipedului; **9.** $V = \ell^3 = 8^3 = 512$ (cm^3); **10.** $V_{bacs} = 96$ $\cdot 20 \cdot 25 =$ = 48000 (cm^3) și $V_{cutie} = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ (cm^3). Sunt necesare 48000 : 8 = 6000 (cutii); **11.** 3 m^3 = 3000000 cm^3 și-au efectuat 3000000 : 60000 = 50 transporturi; **12.** V = 48 cm^3, h = 1800 dm, L = 6,5 cm, ℓ = 5 cm, L = 7 m, V = 72 cm^3; **13.** $V_{perete} = 4 \cdot 2{,}1 \cdot 0{,}3 = 2{,}52$ m^3, $V_{cărămidă} = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}07 =$ 0,0014 cm^3 și sunt necesare 1800 cărămizi; **14.** a) 14825,618 m^3; b) 2001,51 m^3; c) 8290,354 dm^3; **15.** $V_{ext.} = 25 \cdot 12{,}5 \cdot 2{,}5 = 781{,}25$ (m^3), $V_{int.} = 24{,}7 \cdot 12{,}2 \cdot$ $\cdot 2{,}2 = 662{,}948$ (m^3), $V_{beton} = V_{ext.} - V_{int.} = 118{,}302$ m^3.

11. Unități de măsură pentru capacitate; transformări

1. 1,25 kl; 0,125 kl; 3,5 kl; 1,25 kl; 0,0125 kl; 1,25 kl; **2.** 1,5 hl; 0,003795 hl; 0,08 hl; 4,5 hl; 45 hl; **3.** 75 dal; 150 dal; 0,75 dal; 700 dal; 4,5 dal; 4,5 dal; **4.** 80 ℓ; 9800 ℓ; 70 ℓ; 4,5 ℓ; 1,35 ℓ; 0,55 ℓ; **5.** 250 dl; 74 dl; 0,025 dl; 18 dl; 25 dl; 25 dl; **6.** 450 cl; 25 cl; 850 cl; 2200 cl; 25000 cl; 2500 cl; **7.** 76,4 ml; 3500 ml; 4300 ml; 379000 ml; 1300 ml; 50 ml; **8.** 10 hl = 1 m^3; 128 ml = 128 dm^3; 8,27 dl = 0,827 dm^3; **9.** În primul caz, V = 1,728 dm^3 și apa nu dă peste marginile outiei; **10.** a) 144000 ℓ apă; b) 8 m; **11.** V = 6 dm^3 = 6 ℓ și sticla se va goli de 6 : 0,25 = 24 de ori; **12.** L = 0,7 = 7 dm; h = 300 mm = 3 dm și V = $= 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$ $dm^3 \Rightarrow V = 84$ ℓ; **13.** $V = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ (m^3) = 64.000 (dm^3); 40 transporturi; **14.** a) 75 ℓ + 2,05 ℓ + 27,5 ℓ = 104,55 ℓ; b) 35 ℓ + 4 ℓ + 32,47 ℓ = 71,47 ℓ; c) 8290 ℓ + 430 ℓ + 28,6 ℓ + 2,7 ℓ = 8751,3 ℓ; **15.** Luăm cu vasul de 3 ℓ apă din cel de 10 ℓ și o răsturnăm în vasul de 7 ℓ de ori la rând. Umplem vasul de 3 ℓ și astfel în cel de 10 ℓ a mai rămas doar 1 ℓ apă.

12. Unități de măsură pentru masă; transformări

1. 0,4 kg; 11 kg; 930 kg; 5 kg; 960 kg; 9 kg; **2.** 50 g; 9 hg; 12 hg; 7 hg; 9,7385 kg; 2,8 kg; **3.** 1540 dag; 200 dag; 21 dag; 12 dag; 4000 dag; 4,5 dag; **4.** 150 g; 4 g; 15 g; 23 g; 4200; 14000 g; 4000 dg; 8000 dg; 4200 dg; 32 dg; 5 dg; 0,226 dg; **6.** 1400 cg; 11 cg; 70 cg; 25000 cg; 0,08 cg; 40000 cg; **7.** 50 mg; 15550 mg; 3700 mg; 15000 mg; 6000 mg; 800 mg; **8.** 3 q; 72 q; 52q; 4 q; 87 q; **9.** 7,2 t; 0,8 t; 4,5 t; **10.** 1 vagon; 1,455 vagoane; 1,5 vagoane; **11.** a) 0,855 kg + 0,00312 kg + 25 kg + 0,1935 kg = 26,05162 kg; b) 0,003 kg + + 3,457 kg + 0,0082 kg + 310 kg = 313,4682 kg; c) 0,189 kg + 112 kg + + 162,4 kg = 274,589 kg; **12.** $S = (14{,}2)^2 = 201{,}64$ (dm^2) = 2,0164 (m^2). S-au folosit 120,984 kg de asfalt; **13.** a) $V_{ext} = 11^3 = 1331$ (dm^3), $V_{int} = 0{,}1^3 =$ = 0,001 (dm^3); b) Cutia se cântărește $60 \cdot 0{,}001 = 0{,}06$ (kg) = 60 g; **14.** V = 0,5 dam^3 = 500 m^3 = 500000 dm^3 și în siloz încap 340 t de grâu; **15.** $206 \cdot 19 = 1914$ (t) s-a strâns în total (3914 – 608) : 2 = 1653 (t) s-au strâns pe al doilea lot; 1653 + 608 = 2261 (ha) sa-u strâns pe primul lot și 2261:19 = = 119 (ha) are primul lot; **16.** $\frac{1}{3} \cdot 18{,}81 = 6{,}27$ (t) = 6270 (kg) reprezintă $\frac{1}{3}$ din cantitate. S-au încasat $6270 \cdot (6000 + 7500 + 8000) = 6270 \cdot 21500 =$ = 134805000 (lei); **17.** 2,4 kg = 2400 g (cântărește cutia plină); 2400 – 150 = = 2250 g (cântăresc biscuiții); 2250 : 75 = 30 (pachete de biscuiți au fost în cutie); **18.** 1 kg vopsea; **19.** a) 129 t; b) 129 t; c) 43 t.

13. Unități de măsură pentru timp

1. 1440 s; 2h 17min = (2 · 3600 + 17 · 60)s = 8220 s; 1zi 2h 15min = (1 · 24 · · 3600 + 2 · 3600 + 15 · 60)s = 94500s; **2.** 63h 5min; 20h 38min 44s; 1min 54s; **3.** 89 zile; **4.** a) Anul în care luna februarie are 28 zile; b) 2000; **5)** 366 + + 2 · 365 = 1096 (zile); **6.** $V = \frac{D}{t} = 60$ km/h; **7.** 7h și 15min; **8.** a) 270 min = $= \frac{27}{6}$h; b) 55 min = $\frac{11}{12}$ min; c) 84 min = $\frac{7}{5}$h ; d) 84s = $\frac{15}{4}$ min; e) 1304s = $= \frac{1304}{60}$ min; f) ah = $\frac{1}{2}$h + $\frac{150}{5}$ min; g) 2h = $1\frac{1}{2} + \frac{600}{20}$ min; h) $3\frac{1}{2}$h = $= 2\frac{2}{3}$h + $\frac{3000}{60}$ min; **9.** 2min 24s; **10.** ora 8 și 5 minute; **11.** 9h și 30 minute; **12.** a) ora 23 și 10 minute; b) ora 22 și 35 minute; **13.** ora 9 și 10 minute; ora 9 și 55 minute; **14.** 180 minute; 144 minute; 80 minute; 195 minute; **15.** 1200s; 9000 s; 4500s; 1944s; **16.** 6,2h; $2\frac{1}{2}$h = 2,5 h; 72 h; 9,6 h; **17.**18 luni; **18.** 225s; **19.** a) 2h; b) 9min 48s; c) 4h 48 min; d) 8h 11min; e) 4h 10min 41s; f) 1h 51min 4s; g) 15h 30min 53s; h) 39min 53s; **20.** Săptămâna are 7 zile și ca urmare cel puțin unul din cei 8 are aceeași zi cu unul dintre ceilalți. Analog deoarece anul are 12 luni și sunt 13 copii; **21.** $V_{bazin} = 400\ m^3 = 400$ kl și bazinul se umple în 16 ore.

PROBE DE EVALUARE

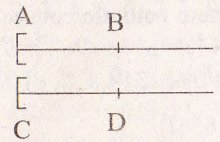
Nivelul A

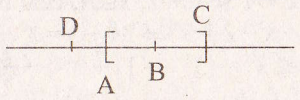
I. 1. 354 cifre; **2.** Se simplifică fracțiile și apoi se obține $10\frac{15}{102}$; $15\frac{4}{5}$; $32\frac{1}{16}$; $44\frac{11}{15}$; **3.** a) $\frac{1}{3} > \frac{1}{17}$; b) $\frac{2}{11} < \frac{7}{11}$; **4.** a) 11,8; b) 69,2; c) 0,6; d) 5; **5.** a) 1 h 51 min 46 s; b) 95,255ℓ; c) 61,7 m;

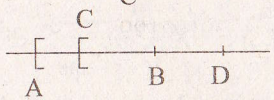
II. 1. $\frac{263}{123}$; $\frac{2182}{435}$; $\frac{77}{73}$; $\frac{79}{17}$; **2.** a) $\frac{3}{28}$; $\frac{5}{28}$; $\frac{9}{28}$; $\frac{11}{28}$; $\frac{17}{28}$; $\frac{23}{28}$; $\frac{25}{28}$; b) $\frac{7}{29}$; $\frac{7}{23}$; $\frac{7}{19}$; $\frac{7}{17}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{7}{3}$; **3.** a) 3,84; b) 1; c) 1; d) 0,9; **4.** a) 112,573; b) 23,5; c) 2,75; d) 7,107; e) 2; f) 12; **5.** 8 și 4.

Nivelul B

I. 1. $\frac{3}{22} = 0,1(36)$ și a 2001-a zecimală este 6; **2.** $\frac{1}{50}$; **3.** a) $\frac{1}{3} < \frac{7}{18} \Leftrightarrow$ $1 \cdot 18 < 3 \cdot 7$; **b)** $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} \Leftrightarrow 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12$; **c)** $\frac{4}{9} > \frac{3}{8} \Leftrightarrow 4 \cdot 8 > 9 \cdot 3$; **4.** a) 850,21 m; b) 16005,765 m^2; c) 644,00149 dam^3. **5.** 2h;

II.1. 1; **2.** a) 

c) 

d) 

3. b) $A = 6\ cm^2$; **4.** $10 \in \mathbf{N}$; **5.** $m_a = \frac{5}{6} = 0,8(3)$

Nivelul C

I. 1. $\frac{x}{y} = \frac{\overline{xy} - x}{90} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{9x + y}{90} \Leftrightarrow 90x = 9xy + y^2$. Cum $9 \mid 90x$ și $9 \mid xy \Rightarrow$ $9 \mid y^2 \Rightarrow 3 \mid y$ și y cifră $\Rightarrow y \in \{3, 6, 9\}$. Pentru $y = 3 \Rightarrow x \notin \mathbf{N}$, pentru $y = 6 \Rightarrow$ $x = 1$ și pentru $y = 9 \Rightarrow x = 9$. **2.** $x = 37$, $y = 6$, $z = \frac{59}{12}$ și $A = 84$. **3.** b) se aplică a). **4.** Se ține cont că $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$; ...; $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ și însumând avem $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} < (n-1) \cdot \frac{1}{2}$. **5.** $\ell = 12$.

II. 1. $\frac{6}{35}$; **2.** $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$, $3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n$ și cum $8^n < 9^n \Rightarrow \max(2^{3n}, 3^{2n}) =$ $= 3^{2n} \Rightarrow \max(2^{3n}, 3^{2n}) > 729 \Leftrightarrow 3^{2n} > 729 \Leftrightarrow 3^{2n} > 3^6 \Leftrightarrow 2n > 6 \Leftrightarrow n > 3$ și cum $n \le 6 \Leftrightarrow n \in \{4, 5, 6\}$. **3.** a) se aduce la același numitor; b) se folosește a) **4.** Se ține cont că $\frac{1}{2} > \frac{1}{n}$; $\frac{1}{3} > \frac{1}{n}$; $\frac{1}{4} > \frac{1}{n}$; ...; $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{n}$ și însumându-le avem $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} > (n-1) \cdot \frac{1}{n}$. **5.** 104.

CAPITOLUL TEME DE SINTEZĂ PENTRU RECAPITULARE FINALĂ ŞI EVALUARE

1. Numere naturale. Numere raţionale

2. $\frac{117}{21}; \frac{117}{51}; \frac{117}{81}; \frac{147}{24}; \frac{147}{54}; \frac{147}{84}; \frac{177}{27}; \frac{177}{57}; \frac{177}{87}$; **3.** 931; **4.** 1257 şi 352; **5.** Fie x, x + 1 şi x + 2, $x \in \mathbf{N}$, cele trei numere naturale consecutive. Avem: $x + x + 1 + x + 2 = 3^n \Rightarrow 3x + 3 = 3^n \Rightarrow 3(x + 1) = 3^n \Rightarrow x + 1 = 3^{n-1} \Rightarrow x = 3^{n-1} - 1$, adică $3^n = (3^{n-1} - 1) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 1)$. **6.** 1314,3. **7.** a) 250; b) $3^{2n+2} = 3^{2n} \cdot 3^2 = 81 \cdot 9 = 729$ şi $3^{4n} = \left(3^{2n}\right)^2 = 81^2 = 6561$.

8. $A = \underbrace{300.....0}_{n+2 \text{ zerouri}} + \underbrace{100.....0}_{n \text{ zerouri}} + \underbrace{200.....0}_{n-3 \text{ zerouri}} - 1 = 30100\underbrace{199.....9}_{n-3 \text{ cifre}}$, adică sunt 3 cifre de zero, 2 cifre de 1, o cifră de 3 şi n – 3 cifre de 9. **9.** Din teorema împărţirii întregi avem: $d = \hat{i} \cdot c + r$, $r < \hat{i} \Rightarrow r < 7 \Rightarrow r \in \{6, 5, 4, 3, 2, 1\} \Rightarrow d \in \{48, 40, 32, 24, 16, 8\}$; deci sunt 6 soluţii. **10.** 70.000 lei Costin şi 40.000 lei Alexandra. **11.** Numerele sunt: 12 şi 20; 13 şi 19; 14 şi 18; 15 şi 17; 16 şi 16; **12.** 80, 50 şi 130; **13.** 300; **14.** Fie $\frac{x}{y}$ fracţia căutată $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y} : \frac{7}{110} = \frac{110}{7y} x \in \mathbf{N} \Rightarrow y \mid 110$ şi $7 \mid x$. Analog pentru celelalte fracţii $\Rightarrow$

$x \in [7, 12, 19] = 1596$ şi $y = (110, 245, 415) = 5 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1596}{5}$; **15.** a) 0; b) 0; c) $\frac{2}{5}$; d) 10; e) $\frac{1}{38}$; **16.** Presupunem că fracţia este reductibilă $\Rightarrow$ există $d \neq 1$ astfel încât $d \mid (2n + 1)$ şi $d \mid (7n + 3) \Rightarrow d \mid 7(2n + 1)$ şi $d \mid 2(7n + 3) \Rightarrow$ d divide diferenţa lor $\Rightarrow d \mid 1$ (absurd) deoarece $d \neq 1$. Deci $\frac{2n+1}{7n+3}$ este ireductibilă; **17.** 72, 108, 324; **18.** Se transformă fracţiilor zecimale în fracţii ordinare, se efectuează calculele $\Rightarrow x + y + z = 9 \Rightarrow m_a = 3$. **19.** $\frac{x}{y} = \frac{x+4a}{y+5a}$

$\Leftrightarrow xy + 5ax = xy + 4ay \Leftrightarrow 5x = 4y \Rightarrow y = \frac{5x}{4}$ şi $\left[x, \frac{5x}{4}\right] = 380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5x}{4} \in \mathbf{N} \Rightarrow x = 4m$. Dar $19 \mid x \Rightarrow x = 76$ şi $y = 95$. **20.** 182 pagini.

2. Mulţimi

2. I. Adevărate a), c) d), e) , f); **II.** a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; b) $A \cup C = \{a, b, c, d\}$; c) $B \cap C = \{c, d\}$; d) $A \cap D = \emptyset$; e) $C - B = \{b\}$; f) $A - D = \{a, b\}$; g) $C - D = \{b\}$; **3.** $\emptyset$; {2}; {3}; {5}; {2, 3}; {2, 5}; {3, 5}; {2, 3, 5}; **4.** x = 4, y = 15; z = 40; **5.** $A = \{1, 2, 3, 5\}$ şi $B = \{1, 4, 5, 6\}$; **6.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B - A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$; $C - B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ şi $(B - A) \cap (C - B) = \emptyset \Rightarrow$ card $[(B - A) \cap (C - B)] = 0$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B \cap C = \{4, 5\} \Rightarrow (A \cup B) - (B \cap C) = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$; **7.** a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 10\}$, $A \cap B = \{2, 6\}$, $A - B = \{3, 7\}$; b) $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ şi card C = 5; c) $(A - B) \cap C = \{3, 7\}$; **8.** $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$; $B = \{-4, 4\}$; $C = \{-2, -1\}$; $D = \{0, 1, 2\}$; **9.** a) $A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{0, 2, 4\}$; b) $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$; $A \cap B = \{2, 4\}$; $A - B = \{1\}$ şi $B - A = \{0\}$; **10.** a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ şi $B = \{1, 2, 3\}$; b) $\emptyset$; {1}; {2}; {3}; {1, 2}; {1, 3}; {2, 3}; {1, 2, 3}; c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A - B = \{4\}$ şi $B - A = \emptyset$; **11.** $A = \{6, 26, 30\}$, $B = \{1, 21, 25\}$, $C = \{0, 20, 24\}$; **12.** $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $B - A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A - B = \emptyset$ şi $A \subset B$; **13.** $A = \{0, 1, 2, \ldots, 100\} \cap \{51, 52, 53, \ldots\} = \{51, 52, \ldots, 100\}$ şi card A = (100 – 51) + 1 = 50 (elemente); **14.** Dacă $3 \in A \Rightarrow A = \{2, 3, 5\}$ şi dacă $3 \notin A \Rightarrow A = \{2, 5\}$; **15.** $A = \{a, b, d\}$; **16.** $B = \{1, 19, 91\}$, $C = \{4, 16, 65.536\}$, $D = \{1, 2\}$, $A \cap B \cap D = \{1\}$, $(A \cup B) \cap D = \{1, 2\}$, $A - D = \{4\}$, $(A \cup B) - C = \{1, 2, 19, 91\}$; **17.** $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$, $C = \{6, 12, 18, 24\}$, $D = \{4, 7, 10, 13\}$, $(A \cap C) \cup B = B$, $(A \cap B) \cap C = \{6, 12\}$, $(A - C) \cap D = \{4\}$ şi $(C \cap D) \setminus B = \emptyset$; **18.** Peste 23 de ani Mihaela va avea 33 de ani iar mama 66 de ani. **19.** a) $A = \{1, 3\}$, $B = \{0, 2, 3, 5\}$, $\frac{3x+5}{x-2} = \frac{3x-6+11}{x-2} =$

$= \frac{3x-6}{x-2} + \frac{11}{x-2} = 3 + \frac{11}{x-2} \in \mathbf{N} \Rightarrow x - 2 \in \{1, 11\} \Rightarrow \Rightarrow x \in \{3, 13\} \Rightarrow$

$\Rightarrow C = \{3, 13\}$; $\frac{x+3}{5} \in \mathbf{N} \Rightarrow 5 / (x + 3) \Rightarrow x + 3 = 5k \Rightarrow x = 5k - 3$, unde $k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow D = \{5k - 3, k \in \mathbf{N}^*\} = \{2, 7, 12, \ldots\}$; b) Se calculează membrul stâng; **20.** a) 3; b) 7; c) 11 şi se obţine dacă A şi B sunt disjuncte; d) 5 şi se obţine dacă $B \subset A$.

3. Ecuaţii şi inecuaţii

2. x = 10; **3.** Din $0 \leq x \leq 1$ şi $1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2x^2 \leq 2$, $0 \leq 4x \leq 4$, $0 \leq 3xy \leq 6$, $5 \leq 5y \leq 10$, $3 \leq 3y^2 \leq 12$ şi însumând rezultă inegalitatea din enunţ; **4.** x =

$= 17,5$; **5.** a) $x = 9$; b) $x = 6$; c) $x = 1$; d) $x = 300$; **6.** a) $x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$; b) $x \in$ $\in \{4,6; 7,5\}$; c) $x \in \varnothing$; **7.** a) 4; b) 6; c) 2,25; d) 0,3; e) 0,(714285); f) 1,25; g) 10,8; h) 144; **8.** a) 60; b) 440; c) 40000; d) 500; **9.** a) $x \in \{1, 2\}$; b) $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$; c) $x \geq 3$ şi $x \in \mathbf{Q}_+$; d) $x \leq 5$ şi $x \in \mathbf{Q}_+$; e) $x \in \{0, 1\}$; **10.** a) $x = 1,5$; b) $x = 3$; c) $x = 2$; d) $x = 0,8$; e) $x = 5$; f) $x = 47$; g) $x = 3,(3)$; h) $x = 5$; i) $x = 1,8$; j) $x = 0,375$; **11.** $x = 1$ şi $y = 2,25$; **12.** 32 elevi şi 2 profesori; **13.** $x = 1$; **14.** 70 şi 20; **15.** $3\frac{1}{2} = 3,5$ şi $17\frac{1}{2} = 17,5$; **16.** 2,1(3) şi 4,2; **17.** 7, 8 şi 9; **18.** 23 ani; **19.** 18 fete şi 14 băieţi; **20.** $\frac{3}{11}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{5}{11}$ şi $\frac{6}{11}$.

4. Divizibilitate

2. a) 1, 2, 4, 8, 16 şi respectiv 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; b) $D_{16} \cup D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$; $D_{16} \cap D_{24} = \{1, 2, 4, 8\}$; $D_{16} \setminus D_{24} = \{16\}$ şi $D_{24} \setminus D_{16} = \{3, 6, 12, 24\}$. **3.** $D_{18} \cap D_{30} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} = \{1, 2, 3, 6\}$ şi cel mai mare este 6. **4.** Dacă $18 \mid a$ înseamnă că divizorii lui 18 îl divid pe a şi patru dintre aceştia sunt: 2, 3, 6, 9. **5.** 2, 6, 12, 14, 28. **6.** a) 2; b) $2^2 = 4$. **7.** a) $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 30\}$; $A \cap B = \{2, 3, 6\}$; $A - B = \{4, 8, 12\}$; $B - A = \{1, 5, 10, 15, 30\}$. **8.** a) Da, numerele 4 şi 9 au cel mai mare divizor comun pe 1 şi se numesc *prime între ele*; este adevărat şi invers; b) Nu, contraexemplu: $12 \vdots 4$, $12 \vdots 6$ şi $12 \not\vdots 24$. Invers este adevărat. Dacă $x \vdots 24 \Rightarrow x \vdots 6$ şi $x \vdots 4$. **9.** $\mathcal{M}_3 = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, \ldots, 3 \cdot n, \ldots\}$ şi cinci multipli neutri ai lui 3 pot fi: 3, 15, 27, 39, 48. **10.** 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30. **11.** $\mathcal{M}_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots, 3n, \ldots\}$; $\mathcal{M}_{10} = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, \ldots, 10n, \ldots\}$; $\mathcal{M}_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \ldots, 5n, \ldots\}$; $\mathcal{M}_{10} \cap \mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_5 = \{0, 30, 60, 90, 120, \ldots, 30x, \ldots\}$. Cel mai mic multiplu comun este 30. **12.** 1) $a \mid b \Rightarrow$ există $x \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $b = ax$ (1) şi $b \mid c \Rightarrow$ există $y \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $c = by \overset{(1)}{\Rightarrow} c = (ax) \cdot y = a \cdot (xy) \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} a \mid c$; 2) $a \mid b \Rightarrow$ există $x \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $b = ax$ (1) şi $b \mid a \Rightarrow$ există $y \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a = by \overset{(1)}{\Rightarrow} a = (ax) \cdot y = a \cdot (xy) \Rightarrow x = 1$ şi $y = 1$ şi $b = a$; 3) Fie $a, b, d \in \mathbf{N}^*$, $a > b$ şi $d \mid a \Rightarrow$ există $x \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a = dx$ şi $d \mid b \Rightarrow$ există $y \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $b = dy$. Calculăm $a + b = dx + dy = d(x + y) \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} d \mid (a + b)$ şi $a - b = dx - dy = d(x - y)$

$\overset{\text{def.}}{\Rightarrow} d \mid (a - b)$; 4) Fie $a, b, d \in \mathbf{N}^*$ şi $d \mid a \Rightarrow$ există $x \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a = dx$. Calculăm $ba = b(dx) = b \cdot d \cdot x = d \cdot (bx) \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} d \mid ba$; 5) Fie $a, b, d \in \mathbf{N}^*$, $d \mid a \Rightarrow$ există $x \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a = dx$. Cum $d \mid (a + b) \Rightarrow d \mid (dx + b) \Rightarrow$ există $y \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $dx + b = dy \Rightarrow b = dy - dx = d(y - x) \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} d \mid b$. **13.** 1023. **14.** a) Fie n şi $n + 1$ două numere consecutive $\Rightarrow P = n(n + 1)$. 1) Dacă n este par $\Rightarrow n = 2k$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow P = 2k(2k + 1) = 2[k(2k + 1)]$ care este număr par; 2) Dacă n este număr impar $\Rightarrow n = 2k + 1$ şi $n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$, iar $P = n(n + 1) = (2k + 1) \cdot 2 \cdot (k + 1) = 2(2k + 1)(k + 1)$ care este număr par, adică oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ produsul $n(n + 1)$ este număr par; b) Analog cu a) numai că n poate lua una din formele: $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2$ şi se arată că $P = n(n + 1)(n + 2)$ este multiplu de 3. 1) Pentru $n = 3k$, P este multiplu de 3 deoarece conţine factorul $n = 3k$ multiplu de 3; 2) Pentru $n = 3k + 1$, P este multiplu de 3 deoarece conţine factorul $n + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ multiplu de 3; 3) Pentru $n = 3k + 2$, P este multiplu de 3 deoarece conţine factorul $n + 1 = 3k + 2 + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ multiplu de 3. Cum n are una din formele $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2 \Rightarrow P \vdots 3$. **15.** a) 2 divizori, 2 divizori, 2 divizori, 4 divizori, 5 divizori, 12 divizori; b) $3 + 1 = 4$ (divizori); $(1 + 1)(3 + 1) = 8$ (divizori); $(2 + 1)(3 + 1) = 12$ (divizori); $(3 + 1)(3 + 1) = 16$ (divizori); c) $x + 1$ divizori; $(1 + 1)(x + 1) = 2(x + 1)$ divizori; $(2 + 1)(x + 1) = 3(x + 1)$ divizori; $(y + 1)(x + 1)$ divizori. **16.** a) $3^{n+1} \cdot 2^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 4^{n+1} = 3^n \cdot 3^1 \cdot 2^{2n} \cdot 2^1 + 3^n \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{n+1} = 3^n \cdot 3^1 \cdot 2^{2n} \cdot 2^1 + 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^{2n+2} = 3^n \cdot 3^1 \cdot 2^{2n} \cdot 2^1 + 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^{2n} \cdot 2^2 = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1 + 6) = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 6 \cdot 7 = 42 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} \vdots 42$; b) $15^{n+2} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 5^n = 15^n \cdot 15^2 + 3^n \cdot 3 \cdot 5^n \cdot 5^2 + 3^n \cdot 3^2 \cdot 5^n = 15^n \cdot 15^2 + (3^n \cdot 5^n) \cdot 3 \cdot 5^2 + 3^n \cdot 5^n \cdot 3^2 = 15^n \cdot 15^2 + 15^n \cdot 75 + 15^n \cdot 9 = 15^n \cdot 3(75 + 25 + 3) = 15^n \cdot 3 \cdot 103 = 15^n \cdot 309 \vdots 309$. *Observaţie.* Au fost folosite metode diferite în rezolvarea exerciţiului 16a faţă de 16b. Oricare din ele poate fi folosită în rezolvarea exerciţiilor. **17.** $\frac{12}{x+1} \in \mathbf{N} \Rightarrow x + 1 \in D_{12} \Rightarrow$ $\Rightarrow x + 1 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 5, 11\} \Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3, 5, 11\}$; $\frac{18}{2x+1} \in \mathbf{N} \Rightarrow 2x + 1 \in D_{18} \Rightarrow 2x + 1 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \Rightarrow 2x \in \{0, 1, 2, 5, 8, 17\} \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 4, \frac{17}{2}\right\} \Rightarrow x \in \{0, 1, 4\} \Rightarrow B = \{0, 1, 4\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 11\}$, $A \cap B = \{0, 1\}$; $A \setminus B = \{2, 3, 5, 11\}$; $B \setminus A = \{4\}$.

18. $\frac{6}{(2x+1)(y-1)} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (2x+1)(y-1) \in D_6 \Rightarrow 2x+1 = 1$ şi $y-1 = 1$ sau $2x+1 = 2$ şi $y-1 = 1$ sau $2x+1 = 1$ şi $y-1 = 3$ sau $2x+1 = 3$ şi $y-1 = 2$ sau $2x+1 = 2$ şi $y-1 = 3$ sau $2x+1 = 6$ şi $y-1 = 1$ sau $2x+1 = 1$ şi $y-1 = 6 \Rightarrow (x, y) \in \{(0, 2); (1, 3); (0, 4); (1, 3); (0, 7)\}$. **19.** $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 40}{2^x \cdot 3^y \cdot 7^z} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z \mid (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 40)$ şi cum x, y şi z sunt cele mai mari posibile $\Rightarrow x = 38$, $y = 18$ şi $z = 5$. **20.** $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x}{3^y \cdot 5^z \cdot 7^t \cdot 17} \in \mathbb{N} \Rightarrow 3^y \cdot 5^z \cdot 7^t \cdot 17 \mid (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x)$. Cum x este cel mai mic posibil $\Rightarrow x = 17$, $y = 6$, $z = 3$, $t = 2$.

MODELE DE LUCRĂRI SCRISE

Lucrarea 1

1. a) 0,79; b) 1,02; c) $1\frac{11}{15} = 1,7(3)$; **2.** a) 16 h 35 min 46 s; b) 1117,03 m; c) 141,102 m^3; **3)** 140 cm; **4.** 7 *l*.

Lucrarea 2

1. $x = 4,8$; **2.** 68 cm şi 225 cm^2; b) 15 cm; **3.** I) a) 7,4; b) 7,43; c) 7,437; II) a) 7,4; b) 7,44; c) 7,438; **4.** a) 0; b) 0,8; c) 1.

Lucrarea 3

1. a) 3; b) 1,64; c) 1; **2.** a) 75 min; b) 6,2757 kg; c) 1225; **3.** a) AB, AD, AA'; b) ABB'A', ABCD, ADD'A'; c) ABCD, CDC'D'; **4.** a) $l = 20$ cm, $P = 112$ cm şi $A = 720$ cm^2; b) $l = 25$ cm.

Lucrarea 4

1. a) 10; b) 300; c) 2.000; **2.** a) 28 cm şi 48 m^2; b) 100 dm^2; **3.** AB, AC şi BC; b) Dacă A, B şi C sunt coliniare atunci dreptele coincid, iar dacă A, B şi C nu sunt coliniare, dreptele sunt distincte; **4.** a) $x = 1$; b) $x \in \{0, 1\}$.

Lucrarea 5

1. 0; **2.** a) 20 cm şi 4 cm; b) 48 cm; **3.** a) 0,5; b) 0,47; c) 0,462; d) 0,5; e) 0,46; f) 0,461; **4.** a) 14; b) 7; c) 425 *l*; d) 6902,43 m^2.

TESTE DE EVALUARE TIP EXAMEN DE CAPACITATE

Testul I

A. 1. 0,742; **2.** 0,4; **3.** $\frac{102\cdot 49}{102\cdot 51} = \frac{49}{51}$; **4.** 97097; **5.** $A = \{0, 6\}$; **6.** 36 cm; **7.** 500 m^3; **8.** $x = 1$; $y = 230$ şi $5x + 1,42y = 331,6$; **9.** 19 cm; 20 cm; 21 cm.

B. 10. $\frac{15}{17}$; $\frac{2}{3}$ şi $\frac{19}{51}$; **11.** a) $\frac{2}{5}$; b) 90 şi 40; **12.** a) $V = 1000$ dm^3; $M = 75.000$ g = 75 kg; b) 1.000 *l*; c) 2.775.000 lei.

Testul II

A. 1. 1; **2.** 0,43; **3.** 7 şi 50,82; **4.** 392; **5.** 4; **6.** 17 cm; **7.** 6,0516 m^2; **8.** 0,0198; **9.** 120.

B. 10. a) Fracţiile care nu sunt supraunitare sunt echiunitare sau subunitare adică de forma $\frac{a}{b}$ unde $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi cum n este par $\Rightarrow$ propoziţia a) este adevărată; b) Fracţiile echiunitare cu numitorul mai mic decât n, sunt fracţiile de forma $\frac{a}{b}$, unde $a \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Avem $n-1$ fracţii şi cum n este par $\Rightarrow$ $n-1$ impar şi propoziţia b) este falsă; c) Fracţiile nenule, subunitare, cu numitorul mai mic decât $2(n+1)$ sunt: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots,$ $\frac{1}{2n+1}, \frac{2}{2n+1}, \frac{3}{2n+1}, \ldots, \frac{2n}{2n+1}$ şi în total: $1 + 2 + 3 + \ldots + 2n = n(2n+1)$ şi cum n este par $\Rightarrow$ propoziţia c) este adevărată; **11.** 210, 280 şi 300; **12.** a) 320 m; b) 5000 m^2; c) 775 m^2.

Testul III

A. 1. 32,7; **2.** $x \in \{1, 2, 5\}$; **3.** 1; **4.** $x = 0$ şi $y = 7$ sau $x = 5$ şi $y = 2$ sau $x = 1$ şi $y = 4$ sau $x = 2$ şi $y = 3$; **5.** 31; **6.** 30 cm; **7.** 45361,52; **8.** 60 min; **9.** $M = \left\{\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{7}{32}, \frac{17}{50}\right\}$.

B. 10. a) Cum $\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{2\cdot 3}{3\cdot 3} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4} = \ldots = \frac{2\cdot 12}{3\cdot 12} \Rightarrow$ sunt 11 astfel de fracţii; b) 4221, 8442, 5226, 9447; **11.** a) $A = 40$ şi $B = 56$; b) $(40, 56) = 8$; $[40, 56] = 280$; c) $D_A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$, $D_B = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$; $D_A \cap D_B = \{1, 2, 4, 8\}$, $D_A - D_B = \{5, 10, 20, 40\}$; **12.** a) 3,24 m^3; b) 2.700 *l*; c) 31.200.000 lei.

Testul IV

A. 1. 25.000 lei; **2.** 0,57; **3.** 3,532; **4.** $\frac{135}{225}$; **5.** 20; **6.** 50 cm; **7.** 56 cm; **8.** 122,0989; **9.** $97\frac{1}{2}$.

B. 10. a) $\frac{137}{28}$; b) 352; c) 959; **11.** Fie x întreaga suprafață. Calculând, obținem în prima zi $\frac{4}{15}x$, a doua zi $\frac{11x}{24}$, a treia zi $\frac{77}{360}x$, a patra zi $\frac{11x}{225}$ și a cincea zi $\frac{11x}{900}$, care reprezintă 55 ha, adică $\frac{11}{900}x = 55 \Rightarrow x = 4.500$ ha și au fost arate în prima zi 1.200 ha, a doua zi 2.062,5 ha, a treia zi 962,5 ha, a patra zi 220 ha și a cincea zi 55 ha; **12.** a) 22.000 lei; b) 27.000 Mihaela, 37.000 Andreea și 42.000 Adi; c) 8.000 lei.

Testul V

A. 1. 5; **2.** 9,(3); **3.** 2h 20 min; **4.** 6 și 10; **5.** 75 pagini; **6.** 3114,75; **7.** 120 kl; **8.** 0,54; **9.** 10 cm.

B. 10. a) Se aduce la același numitor în membrul drept; b) se folosește a) și $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot2001}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2001}=$ $=\frac{1}{1}-\frac{1}{2001}=\frac{2000}{2001}$; c) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ este adevărată relația: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ și avem: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot2}$; $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot3}$; $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{3\cdot4}$; ... ; $\frac{1}{2001^2}<\frac{1}{2000\cdot2001}$. Se adună membru cu membru și se ține cont de b) adică $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot2001}=\frac{2000}{2001}$; **11.** $2^{180} < 3^{120}$ deoarece $(2^3)^{60} < (3^2)^{60} \Rightarrow a + 2^{180} < a + 3^{120} \Rightarrow \frac{a+2^{180}}{a+3^{120}} < 1$ (1).

Analog $5^{900} > 7^{720}$ deoarece $(5^5)^{180} > (7^4)^{180}$, adică $3125^{180} > 2401^{180} \Rightarrow$ $\Rightarrow b + 5^{900} > b + 7^{720} \Rightarrow \frac{b+5^{900}}{b+7^{720}} > 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{a+2^{180}}{a+3^{120}} < \frac{b+5^{900}}{b+7^{720}}$; **12.** a) $V_1 =$ $= 1\ cm^3$, $V_2 = 27\ cm^3$, $V_3 = 216\ cm^3$; b) 27 cuburi; c) 8 cuburi.

PROBLEME DATE LA CONCURSURILE ȘCOLARE

1. Împărțitorul este un număr de două cifre, mai mare ca 98, deci 99. Fie $\overline{aab5}$ numărul căutat $\Rightarrow \overline{aab5} = 99 \cdot c + 98$. Se calculează ultima cifră $\Rightarrow$

$\Rightarrow n(\overline{aab5}) = 5$ și $n(98) = 8 \Rightarrow n(99 \cdot c) = 7 \Rightarrow n(c) = 3 \Rightarrow c = 33$ și $\overline{aab5} =$ $= 3365$; **2.** $4^n - 5 \cdot 2^n = 176 \Leftrightarrow 2^n \cdot (2^n - 5) = 2^4 \cdot 11 \Rightarrow n = 4$; **3.** $a = 1$, $b = 2$, $(b - a)^{2001} = 1$; **4.** Numărul n este divizibil cu 1, 3 și 9 evident. Dar $n = 9(1 +$ $+ 9) + 9^3(1 + 9) + \ldots + 9^{1997}(1 + 9) = 10 \cdot (9 + 9^3 + \ldots + 9^{1997}) \Rightarrow 5 / n$ și cum $n = 9 \cdot (1 + 9 + 9^2) + 9^4(1 + 9 + 9^2) + \ldots + 9^{1996}(1 + 9 + 9^2) = 91 \cdot (9 + 9^4 + \ldots +$ $+ 9^{1996}) = 7 \cdot 13 \cdot (9 + 9^4 + \ldots + 9^{1996}) \Rightarrow 7 / n$; **5.** $13a + 25b + 89x + 134y =$ $(11a + 22b + 88x + 132y) + (2a + 3b + x + 2y) = 11 \cdot (a + 2b + 8x + 12y) +$ $+ (2a + 3b + x + 2y)$ și $11 / (13a + 25b + 89x + 134y) \Leftrightarrow 11 / (2a + 3b + x +$ $+ 2y)$; **6.** $6 \cdot (3^a + \overline{bb}) + 2^c = 493 \Leftrightarrow 2 \cdot (3^{a+1} + 3 \cdot \overline{bb}) + 2^c = 493$. Dacă $c \neq$ $\neq 0 \Rightarrow$ egalitatea ar fi imposibilă căci cei doi membri ai egalității ar avea parități diferite $\Rightarrow c = 0$ și avem: $6 \cdot (3^a + \overline{bb}) = 492 \Leftrightarrow 3^a + \overline{bb} = 82$. Dar $3^4 <$ $< 82 < 3^5 \Rightarrow a \leq 4$ și avem pentru $a \in \{0, 1, 2, 4\} \Rightarrow \overline{bb} \in \{81, 79, 73, 1\}$, imposibil. Dacă $a = 3 \Rightarrow \overline{bb} = 55$ și deci $a = 3$, $b = 5$, $c = 0$ este soluția; **7.** $a =$ $= 1$, $b = 8$, $c = 9 \Rightarrow a + b - c = 0$; **8.** $\frac{1}{x+2y+3z} = \overline{0,xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2y+3z} =$ $= \frac{10x+y}{100} \Rightarrow 100 / (10x + y)$; a) Dacă $x = 0$, cum $y / 100$ și y cifră $\Rightarrow y \in$ $\in \{1, 2, 5\}$ și avem pentru $y = 1 \Rightarrow \frac{1}{2+3z} = \frac{1}{100} \Rightarrow 3z = 98$ (F); pentru $y =$ $= 2 \Rightarrow \frac{1}{4+3z} = \frac{1}{50} \Rightarrow 3z = 46$ (F); pentru $y = 5 \Rightarrow \frac{1}{5+3z} = \frac{1}{20} \Rightarrow z = 5$ și soluția $x = 0$, $y = 5$, $z = 5$; b) Dacă $x \neq 0$ și $y = 0 \Rightarrow 10x / 100 \Leftrightarrow x / 10 \Leftrightarrow x \in$ $\in \{1, 2, 5\}$ și avem $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+3z} = \frac{1}{10} \Rightarrow z = 3$ și soluția $x = 1$, $y = 0$, $z =$ $= 3$; pentru $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2+3z} = \frac{1}{5} \Rightarrow z = 1$ și soluția $x = 2$; $y = 0$; $z = 1$; pentru $x = 5 \Rightarrow \frac{1}{5+3z} = \frac{1}{2}$ (F); c) Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0 \Rightarrow 10x + y \geq 11 \Rightarrow 10x + y \in$ $\in \{20, 25, 50\}$ și nu admite soluții; **9.** $x = 4$; **10.** $(a^2 + b^2 + c^2) / 42 \Rightarrow a^2 + b^2 +$ $+ c^2 \in \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\} \Rightarrow \overline{abc} = 541$;

11. $\frac{(100x+10+x)+(100x+20+x)+\ldots+(100x+90+x)}{100x+50+x} =$

$$\frac{900x+(10+20+...90)+9x}{101x+50}=\frac{909x+450}{101x+50}=\frac{9\cdot(101x+50)}{101x+50}=9\in\mathbf{N};$$

12. a = 2, b = 6; **13.** $\frac{2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot 2000}{3^{2n}\cdot 11^{n}\cdot 2000}$. **14.** a) x = 7, y = 1, a = 1; b) A = $26\cdot 8^{1650}<27\cdot 9^{1650}=B$; **15.** a) $\frac{33}{50}$, $\frac{66}{25}$; b) n = 25; **16.** $\frac{2n+7}{3mn}<1\Rightarrow 2n+7<3mn$. Pentru $m\in\{1,2,3\}\Rightarrow 7<n$, $7<4n$ respectiv $7<7n$ şi nu convine şi pentru $m=4\Rightarrow 7<10n$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$; **17.** a) $a=2\cdot 10^n+1=3\cdot 10^n-10^n+1=3\cdot 10^n-(10^n-1)$ este multiplu de 3, deoarece 10^n-1 este un număr format numai cu cifra 9. Analog b este multiplu de 3. Cum $c=8\cdot 10^n+7=9\cdot 10^n-10^n+6+1=3\cdot(3\cdot 10^n+2)-(10^n-1)$ care este multiplu de 3. Analog 3 / d; b) $7d+c=7\cdot(250\cdot 10^n-1)+8\cdot 10^n+7=1758\cdot 10^n$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$; $b-a=5\cdot 10^n+1-2\cdot 10^n-1=3\cdot 10^n$ $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$. Cum $1758=3\cdot 586\Rightarrow 7d+c=3\cdot 10^n\cdot 586=(b-a)\cdot 586\Rightarrow (b-a)/(7d+c)$; c) Nu poate fi pătrat perfect deoarece ultima cifră este 7. **18.** a) $\frac{x-6}{3}=\frac{x}{4}\Rightarrow x=24\Rightarrow \frac{24}{4}=\frac{18}{3}$; b) x = = 5; **19.** a) a = 5, b = 2 şi c = 3 sau b = 5 şi c = 2 sau b = 8 şi c = 1; b) x = 1, y = 2, z = 3, a = 3, b = 2, c = 1, d = 1; **20.** a) a + b + c = $=\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\right)+...+\left(\frac{102}{309}+\frac{103}{309}+\frac{104}{309}\right)=1+1+...+1=102$ $\Rightarrow \frac{a+b+c}{3}=34$; b) c = 3200; **21.** Fie a, b, c cele trei numere naturale din enunţ $\Rightarrow a+b+c=2000$, $a=b\cdot 1+c$ şi $c=b-100\Rightarrow a=2b-100$, $c=b-100$ şi $(2b-100)+b+(b-100)=2000\Rightarrow 4b=2200\Rightarrow b=550$, a = 1000 şi c = 450; **22.** $1\frac{1}{7}>\frac{a}{9}>\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{8}{9}>\frac{a}{9}>\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{72}{7}>a>\frac{15}{2}\Leftrightarrow 10\frac{2}{7}>a>7\frac{1}{2}$. Dar $a\in\mathbf{N}\Rightarrow a\in\{8,9,10\}$; $\frac{5}{6}>\frac{b}{3}>\frac{11}{2a+b^2}\Leftrightarrow\frac{5}{2}>b>\frac{33}{2a+b^2}>0$ şi cum $b\in\mathbf{N}$ avem $b\in\{1,2\}$ şi $b>\frac{33}{2a+b^2}$. Dacă $b=1\Rightarrow 1>\frac{33}{2a+1}$ şi cum $a\in\{8,9,10\}$ ajungem la contradicţie $\Rightarrow a\in\{8,9,10\}$ şi b = 2; **23.** c.m.m.m.c. al numitorilor este $12\Leftrightarrow[(x+2;12]=12\Rightarrow x+2\in\{2,3,4,6,9,12\}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\{0,1,2,4,7,10\}$; **24.** $\overline{aaa}=a\cdot 111$ şi $\overline{bbb}=b\cdot 111$ cu $a,b\in\{1,2,...,9\}$. Avem $\frac{\overline{aaa}}{bbb}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ cu $a,b\in\{1,2,...,9\}\Leftrightarrow\frac{a}{b}\in\left\{\frac{3}{2},\frac{6}{4},\frac{9}{8}\right\}$;

25. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{x-2}{x}\Rightarrow y=\frac{x-2+2}{x-2}\Rightarrow y=1+\frac{2}{x-2}\Rightarrow\frac{2}{x-2}\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow (x-2)/2\Rightarrow x\in\{3;4\}$. Dacă x = 3 $\Rightarrow$ y = 3 şi dacă x = 4 şi y = 2; **26.** Fie k şi p două numere naturale astfel încât $\frac{n}{2}=k^2$ şi $\frac{n}{7}=p^2\Rightarrow n=2k^2$ şi $n=7p^2\Rightarrow 2k^2=7p^2\Rightarrow k^2=\frac{7}{2}p^2$ şi cum $\frac{7}{2}$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow$ nu există $n\neq 0$ care să verifice condiţia dată; **27.** Notăm cu a, b şi c numerele $\Rightarrow$ $\frac{a+b}{2}=17\Rightarrow a++b=34$; $\frac{b+c}{2}=23\Rightarrow b+c=46$; $\frac{c+a}{2}=25\Rightarrow c+a=50$ şi adunând membru cu membru $\Rightarrow 2(a+b+c)=130\Rightarrow a+b+c=65$ şi a = 19, b = 15, c = 31; **28.** a) $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}+\frac{e}{1+e}=$ $=\frac{1+a}{1+a}-\frac{1}{1+a}+\frac{1+b}{1+b}-\frac{1}{1+b}+\frac{1+c}{1+c}-\frac{1}{1+c}+\frac{1+d}{1+d}-\frac{1}{1+d}+\frac{1+e}{1+e}-\frac{1}{1+e}=$ $=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$; b) $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}\Rightarrow a\cdot(b+c)=a^2\Rightarrow b+c=a\Rightarrow$ ex. fracţiile $\frac{8}{3}$ şi $\frac{8}{5}$; **29.** x = 33, y = 22, z = 14; **30.** a şi b fiind numere prime, nu pot fi ambele pare. Dacă $a=2\Rightarrow\frac{2+b}{2}=1+\frac{b}{2}\in\mathbf{N}\Rightarrow 2\ /\ b$ şi b nu este prim. Analog pentru b = 2, $\frac{a+b}{2}++\frac{a-b}{2}=a$ şi cum a este impar, rezultă că unul dintre termenii sumei este par. Dacă $\frac{a+b}{2}$ este par $\Rightarrow\frac{a+b}{2}=2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a+b=4$, care nu este verificată pentru numerele prime. Dacă $\frac{a-b}{2}=2$ $\Rightarrow a=b+4$, cu b şi b + 4 numere prime şi $\frac{a+b}{2}=\frac{2b+4}{2}=b+2$ (număr prim). Pentru $b=3k+1\Rightarrow b+2=3k+3\ \vdots\ 3$; $b=3k+2\Rightarrow b+4=$

$= 3k + 6 \vdots 3 \Rightarrow b = 3k$, b prim $\Rightarrow b = 3$ şi $a = 7$; **31.** $d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{2000}\right) =$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \ldots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots -$

$- \frac{1}{1000} = \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \ldots + \frac{1}{2000} = b$;

32. $A + B - 2n = \left(\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n+1} + n\frac{1}{n+1}\right) -$

$- 2n = 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n + 1) - 2n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1)$, deci sumă de numere naturale; **33.** a) Se foloseşte $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ şi avem:

$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \ldots +$

$+ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-a}{a(n+1)}$. Cum $\frac{n+1-a}{a(n+1)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 3 - \frac{9}{n+4} \Leftrightarrow n + 4 \in \{9, 3, 1\} \cap \mathbf{N}^* \Leftrightarrow n \in \{5\}$ şi $a = 2$. Grupul căutat este $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6}$; b) $\frac{n+1-a}{a(n+1)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = 1$ şi $a = 1$ şi singurul termen este $\frac{1}{1\cdot 2}$; **34.** Fie $f = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$. Presupunem prin reducere la absurd că există d natural, $d \neq 1$ astfel încât $d(q - p)$ şi d / q, atunci d / q şi $d / q - (q - p) \Leftrightarrow d / p$ şi $(p, q) \neq \neq 1$, deci fracţia $\frac{p}{q}$ nu ar fi ireductibilă. (fals)

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

ŞCOALA ..... JUDEŢUL .....
PROFESOR ..... GRAD DIDACTIC .....

PLANIFICAREA CALENDARISTICĂ
CLASA A V-A

elaborată după programa şcolară de matematică aprobată prin ordinul M.E.C. nr. 4237 din 28.08.1999, cu modificările ulterioare

I. PLANIFICAREA ANUALĂ

Număr săptămâni: 35
Număr ore săptămânal: 4
Total ore: $35 \times 4 = 140$

CONŢINUTURI	NUMĂR ORE	NUMĂR ORE PE SEMESTRU	
		I	II
A. Predare-învăţare	**112**	**48**	64
I. Numere naturale			
Numere naturale	4	4	–
Operaţii cu numere naturale	28	28	–
Elemente de logică matematică	4	4	–
Mulţimi	12	12	–
II. Numere raţionale			
Fracţii	6	–	6
Fracţii ordinare	4	–	4
Fracţii zecimale	18	–	18
Numere raţionale	10	–	10
III. Elemente de geometrie şi unităţi de măsură			
Elemente de geometrie	16	–	16
Unităţi de măsură	10	–	10
B. Recapitularea şi consolidarea cunoştinţelor	**20**	**4**	**16**
C. Lucrări scrise semestriale	**8**	**4**	**4**
TOTAL ORE (A + B + C)	140	56	84

PLANIFICAREA SEMESTRIALĂ
Semestrul I

Număr săptămâni: 14
Număr ore săptămânale: 4
Total ore semestru: 14 × 4 = 56, din care:

- predare-învățare: 48
- recapitularea și consolidarea cunoștințelor: 4
- lucrări scrise semestriale: 4

Unitatea de învățare	Ob. de ref.	Conținuturi	Nr. de ore	Săptămâna
1	2	3	4	5
Numere naturale	1.1 1.3 3.1 3.2	1. Scrierea și citirea numerelor naturale; șirul numerelor naturale; Aproximări; rotunjiri 2. Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Ordonarea numerelor naturale 3. Probă de evaluare	2 1 1	(1)
Operații cu numere naturale	1.2 1.4 1.5 1.9	1. Adunarea numerelor naturale 2. Scăderea numerelor naturale Paranteze; ordinea efectuării operațiilor	2 2	(2)
	2.1 2.2 3.1 3.2	3. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu operații de adunare și scădere 4. Înmulțirea numerelor naturale	2 2	(3)
	3.3 4.1	5. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu operațiile studiate	2	(4)
	4.2	6. Împărțirea numerelor naturale	2	
		7. Ordinea efectuării operațiilor	2	(5)
		8. Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5	2	
		9. Numere pare și numere impare	2	(6)

		10. Ridicarea la putere *Reguli de calcul cu puteri	2	
		11. Compararea și ordonarea puterilor. Reguli de comparare	2	(7)
		12. Pătratul și cubul unui număr natural. *Pătrate perfecte	2	
		13. Ordinea efectuării operațiilor	2	(8)
		14. *Istoria evoluției sistemelor de scriere a numerelor *Baze de numerație	2	
Elemente de logică matematică	1.4 2.2 3.1	1. Propoziții adevărate și propoziții false 2. "Nu", "și", "sau", "dacă-atunci"	2 2	(10)
Mulțimi	1.4 2.2 3.1 3.2	1. Mulțime. Element. Relație de apartenență 2. Relații între mulțimi Submulțimi	2 2	(11)
	4.1 1.1	3. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimile **N** și **N***. Mulțimea divizorilor și mulțimea multiplilor unui număr natural	2	(12)
		4. Mulțimea numerelor întregi	2	
		5. Operații cu mulțimi	2	(13)
		6. Probleme recapitulative	1	
		7. Probă de evaluare	1	
Lucrare scrisă semestrială	1.2 1.5 3.2	1. Pregătirea lucrării scrise 2. Lucrare scrisă 3. Discutarea lucrării scrise	2 1 1	(9)
Recapitularea și consolidarea cunoștințelor			4	(14)

PLANIFICARE SEMESTRIALĂ
Semestrul al II-lea

Număr săptămâni: 21
Număr ore săptămânale: 4
Total ore semestru: 21 × 4 = 84, din care:

- predare-învățare: 68
- recapitularea și consolidarea cunoștințelor: 16
- lucrări scrise semestriale: 4

Unitatea de învățare	Ob. de ref.	Conținuturi	Nr. de ore	Săptămâna
Recapitularea și consolidarea cunoștințelor				6-10. I
Fracții	1.1 2.2 3.3 4.1	1. Fracție; reprezentarea fracțiilor cu ajutorul unor desene 2. Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare 3. Reprezentări echivalente ale fracțiilor. Fracții egale 4. Amplificare și simplificarea fracțiilor. Șir de fracții egale. Număr rațional pozitiv	1 1 1 1	13-14. I
		5. Adunarea fracțiilor la un numitor comun 6. Probă de evaluare	1 1	20-24. I
Fracții ordinare: • operații • comparare	1.1 1.2 2.1 3.2	1. Adunarea și scăderea numerelor raționale pozitive 2. Compararea fracțiilor 3. Probă de evaluare	2 1 1	27-31. I

Fracții zecimale: • adunarea • scăderea	1.1 1.2 1.3 2.1 2.2 2.3 3.1 3.2 4.1	1. Scrierea fracțiilor cu numitorii puteri ale lui 10 sun formă zecimală. Rotunjiri 2. Compararea, ordonarea, reprezentarea pe axă a numerelor raționale scrisă sub formă zecimală 3. Adunarea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule 4. Scăderea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule 5. Probă de evaluare	2 2 2 1 1	27-31. I 3-7. II 10-14.II
Fracții zecimale: • înmulțirea • împărțirea • ridicarea la putere • ordinea efectuării operațiilor	1.2 1.3 2.1 2.3 3.2 4.1	1. Înmulțirea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule (înmulțirea cu 10^n, $n \in \mathbf{N}$; înmulțirea a două numere scrise în virgulă 2. Împărțirea numerelor naturale; împărțirea numerelor care au un număr finit de zecimale naturale la 10^n, $n \in \mathbf{N}$ la un număr natural, la un număr zecimal 3. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a unui număr care are un număr finit de zecimale nenule 4. Periodicitate; oprescinări zecimale* 5. Ordinea efectuării operațiilor 6. Proba de evaluare	2 2 2 3 1	17-21. II 24-28. II
Numere raționale	1.4 1.5 1.9 2.4 2.5 3.3 4.2	1. Rezolvarea și alcătuirea de ecuații, inecuații și probleme care presupun operațiile învățate 2. Media aritmetică a două sau mai multe numere; aplicații 3. Raport, procent 4. Mulțimea numerelor raționale 5. Probleme recapitulative 6. Probă de evaluare	2 2 2 2 1 1	3-7. III 10-14. III 17-21. III

Elemente de geometrie	1.6 1.7 1.8 2.4 3.1 3.3 4.1 4.2	1. Figuri geometrice. Instrumente geometrice. Desenarea figurilor geometrice	2	17-21. III
		2. Măsurarea segmentelor	2	
		3. Unități de măsură pentru lungimi. Transformări	2	24-28. III
		4. Măsurarea unghiurilor	2	
		5. Drepte perpendiculare, drepte paralele	2	31. III-4. IV
		6. Localizarea în plan a unui punct de coordonate întregi*	2	7-11. IV
		7. Simetria și translația	2	
		8. Corpuri geometrice	1	
		9. Probă de evaluare	1	14-18. IV
Unități de măsură	1.8 2.4 3.1 3.3 4.1	1. Unități de măsură pentru suprafețe; transformări	2	
		2. Unități de măsură (lecția recapitulativă)	1	
		3. Unități de măsură pentru volum; transformări	1	5-9. V
		4. Unități de măsură pentru capacitate; transformări	2	
		5. Unități de măsură pentru masă; transformări	2	
		6. Unități de măsură pentru timp; transformări	1	12-16. V
		7. Probă de evaluare	1	
Lucrare scrisă semestrială	1.2 1.5 3.2 4.1	1. Pregătirea lucrări scrise	2	
		2. Lucrare scrisă	1	19-23. V
		3. Discutarea lucrării	1	
Recapitularea și consolidarea cunoștințelor	1. 2. 3. 4.	1. Numere naturale. Numere raționale	2	26-30. V
		2. Mulțimi	2	
		3. Ecuații și inecuații	4	2-6. VI
		4. Divizibilitate	4	9-13. VI

Precizări

1. Planificarea calendaristică este un document administrativ utilizat de profesor în activitatea didactică desfășurată la clasă și are ca scop asigurarea parcurgerii integrale a programei școlare atât la nivel de obiective de referință cât și de conținuturi.

- **unitățile de învățare** sunt unitare din punct de vedere teoretic, se desfășoară în mod sistematic și continuu pe o perioadă de timp și se finalizează prin evaluare;
- **obiectivele de referință** sunt cele prevăzute în programa școlară și numerotate pentru a fi ușor de identificat;
- **conținuturile** selectate sunt cele extrase din lista de conținuturi a programei;
- **numărul de ore alocat** a fost stabilit de autori pe baza experienței dobândite de-a lungul anilor în munca la clasă.

2. Eventualele modificări determinate de aplicarea efectivă la clasă pot fi consemnate de profesor într-o fișă de "Observații".

3. Conținuturile și obiectivele de referință ale lecțiilor de recapitulare și consolidare vor fi stabilite de profesor în săptămâna a XIII-a în funcție de rezultatele evaluărilor.

II. OBIECTIVE DE REFERINȚĂ

1. Cunoașterea și înțelegerea conceptelor, a terminologiei și procedurilor de calcul specifice matematicii.

La sfârșitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

1.1. să scrie, să citească, să compare și să reprezinte pe axă numere naturale, întregi, fracționare și zecimale;

1.2. să efectueze calcule conținând adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri și ridicări la putere, cu numere naturale, fracționare și zecimale, utilizând proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire, *precum **și regulile de calcul cu puteri**;

1.3. să folosească aproximări ale numerelor naturale, fracționare și zecimale pentru a estima validitatea unor calcule;

1.4. să utilizeze elemente de logică și de teoria mulțimilor pentru a justifica etape în rezolvarea unor probleme;

1.5. să utilizeze ecuații de tipul $x \pm a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$ $(a \neq b)$, unde a și b sunt numere naturale, în rezolvarea unor probleme;

1.6. să recunoască figuri și corpuri geometrice; să deseneze figurile și să construiască din diferite materiale corpurile cunoscute;

1.7. să folosească simetria şi translaţia pentru a construi modele geometrice; *să localizeze puncte de coordonate întregi într-un sistem de axe ortogonale;

1.8. să efectueze transformări între multiplii şi submultiplii principalelor unităţi din sistemul internaţional de măsuri (pentru lungime, arie, volum, masă şi timp); să estimeze măsuri ale unor obiecte din mediul apropiat;

1.9. să înregistreze, să clasifice şi să prezinte date sub formă de tabele şi diagrame statistice simple.

2. Dezvoltarea capacităţilor de explorare/investigare şi rezolvare de probleme

La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

2.1. să exploreze modalităţi de descompunere a numerelor naturale şi zecimale, folosind operaţiile studiate;

2.2. să investigheze valoarea de adevăr[1] a unei afirmaţii, prin construirea unor exemple;

2.3. să descopere, să recunoască şi să completeze succesiuni de numere asociate după reguli identificate prin observare;

2.4. să recunoască veridicitatea unor rezultate obţinute prin măsurare sau calcul;

2.5. să construiască probleme pornind de la un enunţ parţial sau de la un model (grafic sau formulă).

3. Dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic

La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

3.1. să identifice informaţiile esenţiale dintr-un enunţ matematic prezentat în diverse forme;

3.2. să prezinte clar, corect şi concis, oral sau în scris, metodele şi/sau operaţiile utilizate în rezolvarea unor probleme;

3.3. să-şi asume diverse roluri de învăţare în cadrul unui grup.

4. Dezvoltarea interesului şi a motivaţiei pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate

La sfârşitul clasei a V-a elevul va fi capabil:

4.1. să-şi formeze obişnuinţa de a exprima prin operaţii matematice anumite probleme practice;

4.2. să manifeste perseverenţă în rezolvarea unei probleme, să propună soluţii sau metode alternative de rezolvare.

[1] Se va opera cu termenii: adevărat, fals.

BIBLIOGRAFIE

1. Burtea, G., Burtea, M. – ***Matematică, clasa a V-a, culegere de probleme în sprijinul manualelor alternative***, Piteşti, Carminis 1988.
2. Chirtop, P., Roşu, M., Radu, V., Ross, G. – ***Matematică, manual pentru clasa a V-a***, E.D.P., R.A., Bucureşti, 1998.
3. Iancu, M., Birta, A., – ***Matematică, manual pentru clasa a V-a***, E.D.P., R.A., Bucureşti, 1997.
4. Popovici, C.P., Borca, I.G., Ligor, I.C., – ***Matematică, manual pentru clasa a V-a***, E.D.P., Bucureşti, 1982.
5. Turcitu, G., Ghiciu, N., Basarab, C., Rizea, I., Dragonu, T., Smarandache, Şt., – ***Matematică, manual pentru clasa a V-a***, Editura "Radical", 1997.
6. Singer, M., Radu, M., Ghica, I., Drugan, Gh., Puican, Fl., Stănciulescu, I., – ***Matematică, manual pentru clasa a V-a***, Editura Sigma, 1997.

CUPRINS

CAPITOLUL NUMERE RAȚIONALE

6. Adunarea și scăderea numerelor raționale pozitive 5
7. Compararea fracțiilor 12
8. Scrierea fracțiilor cu numitori puteri ale lui 10 sub formă zecimală 15
9. Compararea, ordonarea, reprezentarea pe axă a numerelor raționale scrise sub formă zecimală 19
10. Adunarea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule 22
11. Scăderea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule 23
12. Înmulțirea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule (înmulți-rea cu 10^n, $n \in \mathbf{N}$; înmulțirea cu un număr natural; înmulțirea a două numere scrise cu virgulă) 25
13. Împărțirea numerelor naturale: împărțirea numerelor care au un număr finit de zecimale nenule la 10^n, $n \in \mathbf{N}$, la un număr natural, la un număr zecimal 27
14. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a unui număr care are un număr finit de zecimale nenule 29
15. Periodicitate; aproximări zecimale* 31
16. Ordinea efectuării operațiilor 34
17. Rezolvarea și alcătuirea de ecuații, inecuații și probleme care presupun operațiile învățate 37
18. Media aritmetică a două sau mai multor numere; aplicații 39
19. Raport, procent 41
20. Mulțimea numerelor raționale 44
21. Probleme recapitulative 47

CAPITOLUL ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

1. Figuri geometrice. Instrumente geometrice. Desenarea figurilor geometrice 52
2. Măsurarea segmentelor 58
3. Unități de măsură pentru lungimi. Transformări 59
4. Măsurarea unghiurilor 62
5. Drepte perpendiculare. Drepte paralele 64
6*. Localizarea în plan a unui punct de coordonate întregi 66
7. Simetria și translația 68

8. Corpuri geometrice (descriere; evidențierea elementelor: vârfuri, muchii, fețe) 71
9. Unități de măsură pentru suprafețe; transformări 73
10. Unități de măsură pentru volum; transformări 79
11. Unități de măsură pentru capacitate; transformări 82
12. Unități de măsură pentru masă; transformări 84
13. Unități de măsură pentru timp; transformări 86

PROBE DE EVALUARE 89

CAPITOLUL TEME DE SINTEZĂ PENTRU RECAPITULARE FINALĂ ŞI EVALUARE

1. Numere naturale. Numere raționale 93
2. Mulțimi 95
3. Ecuații și inecuații 97
4. Divizibilitate 99

MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE 101

TESTE DE EVALUARE TIP EXAMEN DE CAPACITATE 104

PROBLEME DATE LA CONCURSURILE ŞCOLARE 110

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI 115

PLANIFICAREA CALENDARISTICĂ 153

BIBLIOGRAFIE 161

COLECȚIA MATE 2000 + 2

Sorin Peligrad, Sorin Simion, Dan Zaharia, Maria Zaharia
Aritmetică. Clasa a V-a, partea a II-a, ediția a VI-a
(anul școlar 2001-2002) 35.000
Dan Brânzei, D. Zaharia, M. Zaharia
Aritmetică. Algebră. Geometrie. Clasa a VI-a, partea a II-a,
ediția a VI-a (anul școlar 2001-2002) 35.000
D. Brânzei, A. Negrilă, M. Negrilă
Algebră. Geometrie. Clasa a VII-a, partea a II-a, ediția a VI-a
(anul școlar 2001-2002) 35.000
Anton Negrilă, Maria Negrilă
Algebră. Geometrie. Clasa a VIII-a, partea a II-a, ediția a VI-a
(anul școlar 2001-2002) 35.000

COLECȚIA MATE 2000 + 2 PLUS

P. Alexandrescu (coord.), M. Dincă, V. Ivan, E. Nițu, C. Ichim
Exerciții și probleme de matematică pentru clasa a V-a 35.000
P. Alexandrescu (coord.), N. Popa, M. Gâț, C. Galațchi, D. Făinișî
Exerciții și probleme de matematică pentru clasa a VI-a 35.000
P. Alexandrescu (coord.), N. Popa, M. Gâț, C. Galațchi, D. Făinișî
Exerciții și probleme de matematică pentru clasa a VI-a,
partea a II-a 30.000
P. Alexandrescu (coord.), E. Diniță, M. Ionescu, G. Ross, D. Enache
Exerciții și probleme de matematică pentru clasa a VII-a 45.000